

# ACTA PHYSICA AUSTRIACA

UNTER MITWIRKUNG DER  
ÖSTERREICHISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
HERAUSGEGEBEN VON  
K.W. FRITZ KOHLRAUSCH UND HANS THIRRING  
GRAZ WIEN

SCHRIFTFLEITUNG  
PAUL URBAN  
GRAZ

5. BAND, 2. HEFT  
MIT 38 ABBILDUNGEN  
(AUSGEGEBEN IM DEZEMBER 1951)



WIEN  
SPRINGER-VERLAG  
1951

## Richtlinien für die Abfassung von Beiträgen

**Allgemeines.** Die Arbeit soll klar und verständlich geschrieben sein. Es ist Rücksicht auf jene Leser zu nehmen, die nicht gerade an demselben Problem arbeiten. Auch ohne übermäßige und nicht verantwortbare Breite der Darstellung kann häufig ein eingefügter kleiner Satz dem Leser eine Stunde Nachdenken ersparen. Jede Niederschrift ist ein Ringen um das richtige Wort an der richtigen Stelle. Nur den wenigsten ist es gegeben, auf den ersten Anrieb schon das Optimum an Aufbau, Gliederung und Ausdruck zu erreichen. Meist wird dies erst nach mehrfachem Umarbeiten gelingen. Diese Mühe muß der Autor auf sich nehmen. Erstens schon in seinem eigensten Interesse, um nicht monatelange Arbeit durch unzweckmäßige Darstellung der Ergebnisse zu entwerten; zweitens im Interesse der Drucklegung, da nachträgliche stilistische Verbesserungen und Veränderungen so viel Mehrarbeit für den Setzer bedeuten, daß sie, selbst wenn die Kosten dem Autor angerechnet werden, bei den heutigen Verhältnissen als untragbar bezeichnet werden müssen. Eben diese Verhältnisse machen es den Herausgebern zur unabweislichen Pflicht, Abhandlungen, die nach ihrem Dafürhalten den üblicherweise zu stellenden Anforderungen in dieser Hinsicht nicht voll entsprechen, zur Umarbeitung zurückzusenden.

Manuskripte sind entweder an die Schriftleitung der „Acta Physica Austriaca“, Prof. Dr. Paul Urban, Graz, Universitätsplatz 5, oder an den Springer-Verlag, Wien I, Mülkerbastei 5, zu richten.

**Umfang:** Obere Grenze etwa ein Druckbogen; längere Abhandlungen sind zu unterteilen.

**Äußere Form:** Maschinenschrift; einseitig beschriebene, fortlaufend bezifferte Blätter, linksseitig mit breitem freiem Rand.

**Titelkopf:** Titel der Arbeit (soll bereits unmißverständlich kennzeichnend für den behandelten Gegenstand sein). Darunter der Name des Verfassers mit ausgeschriebenem Vornamen. Darunter Angabe des Institutes, aus dem die Arbeit stammt, oder Privatanschrift des Verfassers; darunter „Mit . . . Abbildungen.“

*Fortsetzung auf der III. Umschlagseite*

### 5. Band/2. Heft

### Inhaltsverzeichnis

	Seite
Votava, E. Über die schraubenförmige Bewegung metallischer Probekörper der Größenordnung $10^{-3}$ bis $10^{-5}$ cm im magnetischen Felde . . . . .	177
Weinzierl, P. M. Untersuchung der Strahlung von $Ra(B+C)$ mittels der Trochoidenmethode . . . . .	185
Reder, F., und E. Hafner. Eine einfache Methode zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstante von Flüssigkeiten im cm-Wellen-Gebiet . . . . .	189
Robl, H. Die Dichte von entarteten Gasen in Potentialfeldern . . . . .	202
Oppitz, H. Über die experimentelle Bestimmung von linearen Vierpolen im cm-Wellen-Gebiet . . . . .	214
Helml, F., und J. A. Schedling. Untersuchungen über die Radianabhängigkeit der Durchmesserfälschung, die bei der mikroskopischen Abbildung kugelförmiger Selenteilchen auftritt . . . . .	237
Bergmann, O. Der Begriff des virtuellen Niveaus in der Theorie der elastischen Streuung von Neutronen an Atomkernen . . . . .	240
Fischmeister, H. Ein Verfahren zur gleichzeitigen Bestimmung von effektivem Filmradius und Kollineationsfehlern bei Weißenbergkameras . . . . .	254
Sexl, Th. Über die Geiger-Nuttall-Relation . . . . .	258
Buchbesprechungen . . . . .	263



# Über die schraubenförmige Bewegung metallischer Probekörper der Größenordnung $10^{-3}$ bis $10^{-5}$ cm im magnetischen Felde.

Von

**Erwin Votava.**

I. Physikalisches Institut der Universität Wien.

Mit 9 Abbildungen.

(Eingelangt am 28. März 1950.)

## Zusammenfassung.

Die Bewegungsformen von Eisen- und Silberstahlprobekörpern (Pk.) im Magnetfeld eines gleichstromdurchflossenen Leiters unter gleichzeitiger Einwirkung intensiven Lichtes wurden visuell untersucht und zum Teil mikrophotographiert. Es konnten folgende Bewegungsformen festgestellt werden:

- a) Eine translatorische Bewegung (d. h. eine Bewegung längs der Feldlinien ohne Rotationsbewegung um die Fortschrittingsrichtung), die mit dem Magnetfeld kommutierbar ist;
- b) eine rotatorische Bewegung auf der Stelle und
- c) eine schraubenförmige Bewegung, wobei die Rotationsachse parallel zur magnetischen Feldrichtung liegt.

Insbesondere ergab sich, daß die schraubenförmige Bewegung von Pk. im Magnetfeld von der Lichtintensität und der magnetischen Feldstärke abhängt; eine Abhängigkeit von der elektrischen Ladung der Pk. konnte nicht gefunden werden. Der Schraubungssinn in der Fortschrittingsrichtung bleibt bei Kommutation der Bewegungsrichtung durch Umkehr der Magnetfeldrichtung erhalten.

Die Existenz von Pk., die im Magnetfeld unter dem Einfluß intensiver Beleuchtung nur eine Rotationsbewegung zeigen, dagegen keine Translationsbewegung aufweisen, läßt vermuten, daß die Schraubenbewegung als ein Phänomen sui generis zu betrachten ist.

## Einleitung.

*F. Ehrenhaft* hatte bereits früher<sup>1)</sup>, insbesondere mikrophotographisch, festgestellt, daß im konzentrierten Sonnenlicht

<sup>1)</sup> *F. Ehrenhaft*, Wien. Akad. Ber. 119 (2a), 835 (1910); Ann. Physik 56, 81 (1918); C. R. 190, 263 (1930); Phil. Mag. 11, 140 (1931); Ann. Physique 13, 151 (1940); Journ. Frank. Inst. 230, 381 (1940); Ann. Physique, 11<sup>e</sup> Série, Tome 13, Mars-Avril (1940); Journ. Frank. Inst. 233, 235 (1942); Science 101, 676 (1945); Physic. Rev. 68, 285 (1945); Physic. Rev. 69, 52, 251 (1946); C. R. 224, 1151—1152 (1947); C. R. 222, 1100—1103 (1946); Physic. Rev. 71, 480 (1947); Acta Physica Austriaca, Bd. II, Heft 2, 187 (1948).

ohne Anwendung elektrischer oder magnetischer Felder Pk., die in oder gegen die Richtung des Lichtstrahles wandern (positive und negative longitudinale Photophorese), diese Bewegung oftmals in einer Schraubenbahn vollführen. Wie *F. Ehrenhaft* weiters zeigen konnte<sup>2)</sup>, ändert z. B. ein dem Lichtstrahl paralleles magnetisches Feld, erzeugt durch Helmholtzspulen, bei Eisen-Pk. den Schraubendurchmesser und die Ganghöhe.

Ferner konnte der genannte Verfasser eine weitere Tatsache feststellen, nämlich, daß einige Pk. auch normal zur Richtung des Lichtstrahles aufwärts und abwärts wanderten und auch hier eine schraubenförmige Bewegung zu beobachten ist (transversale Photophorese).

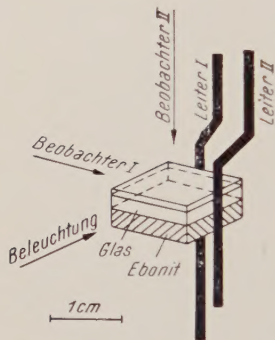


Abb. 1. Beobachtungszelle mit Leiter I und II sowie mit Beleuchtungs- und Beobachtungsrichtungen.

Neuere Untersuchungen von *E. Reeger* am hiesigen Institut ergaben, daß die transversale Photophorese an ferromagnetischen Teilchen wohl zum größten Teil auf das erdmagnetische Feld zurückzuführen ist. Bei nicht ferromagnetischen Substanzen konnte eine echte transversale Photophorese gefunden werden.

Zusammenfassend hat *F. Ehrenhaft* seine Untersuchungen über die schraubenförmige Bewegung von Materieteilchen folgendermaßen formuliert<sup>3)</sup>:

The rotational movement can therefore not be explained as "magnetic action of electric currents" (Oersted-Lorentz), nor as "electric action of magnetic currents" formulated by the author in formal symmetry with Oersted, nor as "electric action of magnetic currents" defined by Poincaré and called "Hertz force". Seemingly we are confronted with a new force which is capable of causing matter to move in helical paths at a velocity of  $10^{10}$  times slower than the velocity of light in weak magnetic fields.

Im folgenden werden einige neue Ergebnisse von Untersuchungen der schraubenförmigen Bewegung von kleinen metallischen Pk. der Größenordnung  $10^{-3}$  bis  $10^{-5}$  cm gegeben und auch mit Mikrophotographien belegt.

Die Versuchsanordnung, hinreichend beschrieben<sup>4)</sup>, sei hier nochmals kurz gestreift. Abb. 1 zeigt schematisch die Beobachtungszelle. Sie gestattet sowohl eine Beobachtung der

<sup>2)</sup> *F. Ehrenhaft*, C. R. 222, 1100—1103 (1946).

<sup>3)</sup> *F. Ehrenhaft*, Physic. Rev. 70, 119 (1946).

<sup>4)</sup> *J. A. Schedling*, C. R. 227, 470—472 (1948).



in ihr suspendierten Pk. in einer zum Leiter I und II senkrechten Ebene mit Hilfe eines vertikalen Mikroskops als auch eine Beobachtung in einer zu den beiden Leitern parallelen Ebene nach der Dunkelfeldmethode. Die Beleuchtungseinrichtung sowie andere notwendige experimentelle Anordnungen wurden in Anlehnung an die bekannte Apparatur von *F. Ehrenhaft*<sup>5)</sup> verwendet. Die Pk. sind in Luft suspendiert und besitzen daher sechs Freiheitsgrade der Bewegung. Die Partikelerzeugung erfolgte mit Hilfe eines elektrischen Lichtbogens in einem Glasballon. Als Partikelmaterial wurde Eisen oder Silberstahl<sup>6)</sup> verwendet.

### Versuchsergebnisse.

Unter der Einwirkung intensiven Lichtes zeigen viele Pk. im Magnetfeld der Erde und auch in denjenigen der Leiter I und II sowohl eine in Richtung der Kraftlinien verlaufende Translationsbewegung als auch eine Rotationsbewegung, die in einer zu den magnetischen Kraftlinien senkrechten Ebene erfolgt. Man findet jedoch auch Pk., die im Magnetfeld der Leiter (2 bis 5 Gauß) nur eine Rotation, dagegen keine Translation zeigen.

Neuere Untersuchungen an solchen Pk., die der Verfasser mit Herrn *Henri Danan* durchführte, ergaben, daß die stationäre Rotation bei Anlegen einer entsprechend höheren magnetischen Feldstärke in eine Schraubenbahn übergeht. In einem Magnetfeld, dessen Stärke unter dem Ausgangswert liegt, zeigen derartige Pk. eine Schraubenbewegung in entgegengesetzter Richtung. Stellt man die Ausgangsfeldstärke wieder her, so beobachtet man neuerlich die stationäre Rotation. Dies deutet darauf hin, daß die Rotation von Pk. in Magnetfeldern von der Translation unabhängig und ein Phänomen sui generis ist.

Die Beobachtung, daß die translatorische Bewegung von Pk. in Magnetfeldern parallel zu den Feldlinien bei einem gewissen, für den Pk. individuellen Wert der magnetischen Feldstärke verschwinden kann und nach Überschreiten dieses Wertes in entgegengesetzter Richtung verläuft, wurde bereits von *Nissen Judenberg* gemacht<sup>7)</sup>.

Der Schraubendurchmesser beträgt oftmals ein Vielfaches der Partikelgröße. So ist z. B. der Schraubendurchmesser bei Abb. 6  $5,5 \times 10^{-3}$  cm, der Pk. von der Größenordnung  $10^{-4}$  cm. Außerhalb des Lichtstrahles beenden die Pk. ihre Schraubenbewegung und zeigen nur mehr die Fallbewegung mit überlagerter *Brownscher* Bewegung. Schwächt man die Lichtintensität

<sup>5)</sup> *F. Ehrenhaft*, Ann. Physique 13, 161 (1940).

<sup>6)</sup> 1,1% C, 0,2% Si, 0,3% Mn, 1,0% Cr, 0,1% Va, Rest Fe.

<sup>7)</sup> *F. Ehrenhaft*, Ann. Physique, 11<sup>e</sup> Série, Tome 13, Mars-Avril (1940).

kontinuierlich, so zeigt sich bei allen Pk. eine kontinuierliche Verlangsamung der Rotationsgeschwindigkeit. Dies beobachtet man auch, wenn der Pk. in ein Gebiet geringerer Lichtintensität gelangt.

Beobachtet man diese Vorgänge im Magnetfeld des Leiters I, so sieht man in diesem Falle mit dem horizontalen Mikroskop in die Richtung der Rotationsachse und beobachtet als Projektion der Schraubenbewegung eine kreisförmige Bahn. Diese wird unscharf, da der Pk. ja gleichzeitig entweder nach vorn oder rückwärts aus der Schärfeebene auswandert.

Auf diese Weise konnte festgestellt werden, daß der Rotationssinn in der Fortschreitungsrichtung der Pk. bei Kommutation der Magnetfeldrichtung erhalten bleibt (z. B. Rechtsschraube bleibt Rechtsschraube auch nach Umkehr der Bewegungsrichtung).

Es sei hier noch bemerkt, daß außer den Schraubenbahnen auch noch geradlinige Bahnen von Pk. zu beobachten sind (d. h. Bahnen längs der Feldlinien ohne Rotationsbewegung um die Fortschreitungsrichtung). Es wurden z. B. einige längliche Pk. untersucht, deren Gestalt einwandfrei innerhalb und außerhalb des Lichtstrahles gesehen werden konnte und die spezielle Merkmale, z. B. einen kleinen Fortsatz oder Knick, hatten. An Hand dieser Merkmale konnte festgestellt werden, daß diese Pk. bei ihrer Bewegung im Magnetfeld keine Rotationsbewegung oder auch nur Ansätze dazu zeigten. Dies deutet wieder darauf hin, daß die Rotationsbewegung und die Translationsbewegung voneinander unabhängig sind.

In bezug auf Ganghöhe und Durchmesser ist die Schraubenbewegung sehr regelmäßig. Ein Bild von der Art der Regelmäßigkeit wird man aber am besten durch die nun folgenden Mikrophotographien gewinnen. Für die Aufnahmen wurde eine Contax-Kleinbildkamera verwendet (Brennweite = 50 mm, Bildformat =  $24 \times 36$  mm, Kameraobjektiv = Zeiß-Tessar 1:2,8), die unmittelbar mit ihrem Aufnahmenobjektiv hinter das Okular (Leitz-Doppelokular) des Mikroskops gesetzt wurde. Auf diese Weise war es möglich, auch während der Aufnahme zu beobachten und somit ein Teilchen dauernd unter Kontrolle zu halten.

Bei den folgenden Aufnahmen handelt es sich um Silberstahlpartikeln. Der stromführende Leiter (die Stromstärke betrug bei allen Aufnahmen 16 Ampere, der Abstand der beobachteten Partikeln vom Leiter 1 bis 1,1 cm, demnach die magnetische Feldstärke in diesem Bereich 2,9 bis 3,2 Gauß) liegt für diese Aufnahmen (Abb. 2, Abb. 3, Abb. 4, Abb. 5, Abb. 7, Abb. 8, Abb. 9) vertikal hinter der Mitte der Bilder. Die Belichtungszeit lag zwischen 5 und 10 sec. Als Lichtquelle wurde eine Gleichstrombogenlampe verwendet.



Abb. 2 zeigt die Bewegung eines Pk. unter dem Einfluß des Magnetfeldes. Die Bahn ist sehr glatt und nur durch die

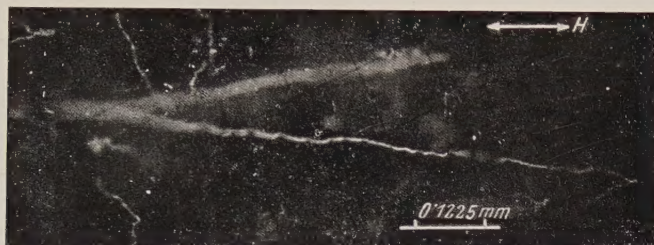


Abb. 2. Silberstahl-Pk. im Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters. Bahn sehr glatt.

überlagerte *Brownsche* Bewegung gestört. Das Magnetfeld wurde dreimal reversiert.

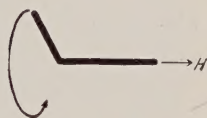


Abb. 3 und 3a. Schraubenbewegung eines länglichen Pk. Abb. 3a zeigt schematisch seine Gestalt.

Abb. 3 zeigt die Bahn eines länglichen Pk., Abb. 3a schematisch seine Gestalt sowie die Richtung der Translations- und

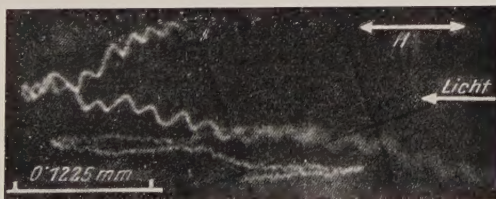


Abb. 4. Kommutation einer Schraubenbewegung.  
Schraubendurchmesser rund  $2 \times 10^{-3}$  cm.

Rotationskomponente. Die Photographie hat in bezug auf die Rotation nur die Bewegung des seitlichen Fortsatzes festgehalten.

Abb. 4 zeigt die Kommutation einer Schraubenbewegung bei Kommutation des Magnetfeldes. Der Schraubendurchmesser beträgt rund  $2 \times 10^{-3}$  cm.

Abb. 5 zeigt eine gut ausgeprägte Schraubenbahn, die hinsichtlich Spiraldurchmesser und Ganghöhe sehr regelmäßig ist. Die Verschiebungen der einzelnen Windungen gegeneinander rühren vom Einfluß der Brownschen Bewegung her. Man bemerkt, daß



Abb. 5. Pk. mit Schraubenbewegung im Erdfeld bei 1, Feldstärke ca. 0,2 Gauß, Schraubendurchmesser rund  $2 \times 10^{-3}$  cm und im Magnetfeld des Leiters (Feldstärke ca. 3,2 Gauß, Schraubendurchmesser rund  $4 \times 10^{-3}$  cm).

diejenigen Teile der Bahn, die annähernd parallel zur Aufnahme-richtung sind, viel lichtstärker erscheinen. Der Pk. bewegte sich zuerst bei 1 mit kleinerer Ganghöhe und kleinerem Schraubendurchmesser im magnetischen Erdfeld (ca. 0,2 Gauß). Der

Schraubendurchmesser im Erdfeld beträgt rund  $2 \times 10^{-3}$  cm, im Magnetfeld des Leiters (3,2 Gauß) rund  $4 \times 10^{-3}$  cm.

Abb. 6 zeigt die Schraubenbahn eines Pk. im Magnetfeld des Leiters II, wobei der Leiter in bezug auf den Lichtstrahl

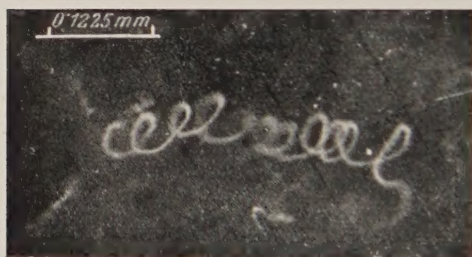


Abb. 6 und 6a. Schraubenbewegung eines Pk. im Magnetfeld des Leiters II, wobei der Leiter in bezug auf den Lichtstrahl so justiert war, wie aus Abb. 6a hervorgeht. Schraubendurchmesser rund  $5,5 \times 10^{-3}$  cm.

so justiert war, wie aus Abb. 6a hervorgeht. Es wurde damit erreicht, daß sich die einzelnen Windungen der Spirale bei der Aufnahme nicht deckten. Das Mikroskop wurde dauernd nachgestellt, so daß, obwohl die Bahn von vorn nach rückwärts verläuft, sie in ihrem ganzen Verlauf scharf ist. Der Schraubendurchmesser beträgt rund  $5,5 \times 10^{-3}$  cm.

Die Schraubenbewegung von Pk. tritt aber nicht nur in künstlichen Magnetfeldern, sondern auch, wie schon erwähnt,



im erdmagnetischen Feld auf. Als Beispiel dient die folgende Abb. 7 (Bahn 1—2: Bewegung im magnetischen Erdfeld; Bahn 2—3: Bewegung im Magnetfeld des Leiters, überlagert durch die Fallbewegung).

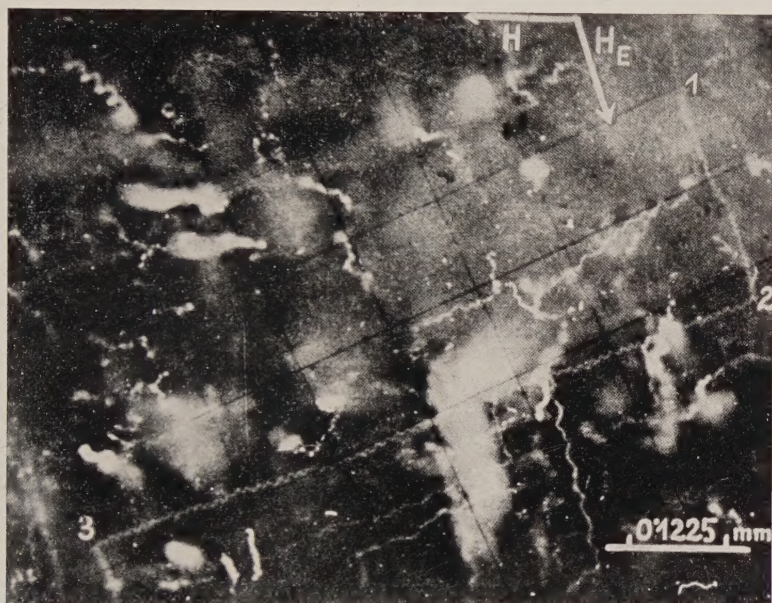


Abb. 7. Schraubenbewegung von Pk. im Erdfeld (Bahn 1—2) und im Magnetfeld des Leiters (Bahn 2—3).

### Einige Aussagen über die Ursachen der schraubenförmigen Bewegung.

Es wurde zunächst untersucht, ob irgendwelche Zusammenhänge mit einer eventuellen elektrischen Ladung der Pk. vorhanden sind. Pk., die die Schraubenbewegung aufwiesen und durch ihr Verhalten im elektrischen Feld zeigten, daß sie entweder positiv oder negativ elektrisch geladen oder ungeladen waren, wurden mittels eines Poloniumpräparates umgeladen oder aufgeladen. Hinsichtlich ihrer schraubenförmigen Bewegung konnte aber keine Veränderung ihres Verhaltens festgestellt werden. In Fortsetzung dieser Arbeit untersuchte Herr *Henri Danan* eine größere Anzahl von Pk. und konnte ebenfalls keinen Zusammenhang zwischen Schraubenbewegung und elektrischer Ladung feststellen.

Eine weitere Aussage läßt sich aus der Einwirkung von Magnetfeldern verschiedener Stärke ableiten. Abb. 8 zeigt die

Schraubenbahn eines Silberstahl-Pk. im Magnetfeld des Leiters (Bahn 1—2) und im Erdfeld (Bahn 2—3). Die Schraubenbahn ist sehr unregelmäßig und weitgehend von der *Brownschen*

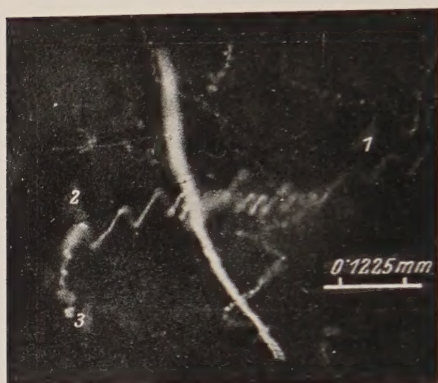


Abb. 8. Schraubenbewegung eines Silberstahl-Pk. im Magnetfeld des Leiters (Bahn 1—2, Feldstärke 3,2 Gauß, Schraubendurchmesser rund  $4 \times 10^{-3}$  cm) und im Erdfeld (Bahn 2—3, Feldstärke rund 0,2 Gauß, Schraubendurchmesser rund  $2 \times 10^{-3}$  cm).

Bewegung überlagert. Es ist aber deutlich zu sehen, daß der Schraubendurchmesser im Erdfeld wesentlich kleiner ist als im Magnetfeld des Leiters. Es beträgt der Schraubendurchmesser im Erdfeld (ca. 0,2 Gauß) rund  $2 \times 10^{-3}$  cm, im Magnetfeld des Leiters (ca. 3,2 Gauß) rund  $4 \times 10^{-3}$  cm. In bezug auf die Ganghöhe ist diese Photographie nicht auswertbar.

Dagegen zeigt die Bahn des Pk. der Abb. 9 weniger einen Unterschied im Spira-

laldurchmesser als in der Ganghöhe, die im Erdfeld merklich kleiner ist (1—2:

2—3: Bewegung im magnetischen Erdfeld). Ein solches Verhalten kann mit *Judenberg*<sup>8)</sup> so gedeutet werden, daß wir uns noch im Bereich der Proportionalität zwischen Feldstärke und Geschwindigkeit befinden und daher die Schraubenbahn durch die größere magnetische Feldstärke auseinandergezogen wird und somit eine größere Ganghöhe aufweist.

Die schraubenförmige Bewegung ist also von der magnetischen Feldstärke abhängig. Die quantitative Erfassung dieses Zusammenhanges ist derzeit Gegenstand einer Untersuchung.



Abb. 9. Silberstahl-Pk. im Erdfeld (Bahn 1—2) und im Magnetfeld des Leiters (Bahn 2—3). Ganghöhe im Erdfeld merklich kleiner.

Für das fördernde Interesse und die Anteilnahme an dem Fortgang dieser Untersuchung danke ich dem Institutsdirektor, Herrn Prof. F. Ehrenhaft.

<sup>8)</sup> Wie 7).



# Untersuchung der Strahlung von Ra ( $B + C$ ) mittels der Trochoidenmethode.

Von

**Peter M. Weinzierl.**

I. Physikalisches Institut der Universität Wien.

Mit 6 Abbildungen.

(Eingelangt am 6. Mai 1950.)

*J. Thibaud* berichtete in den Jahren 1946/47<sup>1)</sup> über die Existenz einer Strahlung, welche beim Zerfall von RaC und RaE auftritt und Eigenschaften besitzt, die nicht den Zerfallselektronen dieser Präparate zugeschrieben werden können. Ohne nähere Angaben über die verwendeten experimentellen Anordnungen zu machen, veröffentlichte *Thibaud* Photographien dieser Erscheinung und schrieb dieselbe der Wirkung extrem leichter elektrisch positiv oder negativ geladener Partikeln zu, die er als Elektrinos bezeichnet und von denen er annimmt, daß sie beim Betazerfall jene Rolle spielen, welche die theoretischen Ansätze<sup>2)</sup> dem Neutrino zugeordnet hatten. In zwei weiteren Arbeiten diskutiert er das Verhalten dieser Elektrinos im inhomogenen Randgebiet des Magnetfeldes zweier zylindrischer Polschuhe<sup>3)</sup>.

Bei Untersuchungen der Strahlung von Ra ( $B + C$ ) unter Verwendung der Trochoidenmethode<sup>4)</sup> wurden Ergebnisse erzielt, welche eine auffallende Übereinstimmung mit den von *Thibaud* beschriebenen Phänomenen zeigen.

## Versuchsanordnung.

Abb. 1 zeigt schematisch die verwendete Apparatur. Die von der Quelle ausgehenden Elektronen beschreiben in dem inhomogenen Magnetfeld trochoidenähnliche Bahnen und gelangen auf diesen zum registrierenden Film. Eine Sperre

1) *Thibaud*, C. R. 223, 984 (1946); 224, 739 (1947); 224, 914 (1947).

2) *Fermi*, Z. Physik 88, 161 (1934); *Konopinski*, *Uhlenbeck*, Physic. Rev. 48, 7 (1935).

3) *Thibaud*, C. R. 225, 999 (1947); 225, 1302 (1947).

4) *Thibaud*, C. R. 197, 447 (1933).

(10 mm Aluminium) hindert Partikeln entgegengesetzter elektrischer Ladung daran, um die andere Seite des Polschuhs herum zum Film zu gelangen. Der Druck in der Kammer betrug während der Aufnahmen  $10^{-3}$  bis  $10^{-4}$  mm Hg. Als Strahlungsquelle diente ein Glasröhrchen (15 mm lang, 2 mm Durchmesser, 0,5 mm Wandstärke), gefüllt mit Radiumemanation. Das Röhrchen ist senkrecht zur Ebene der Abbildung angeordnet und seine Lage kann längs der punktiert gezeichneten Linie

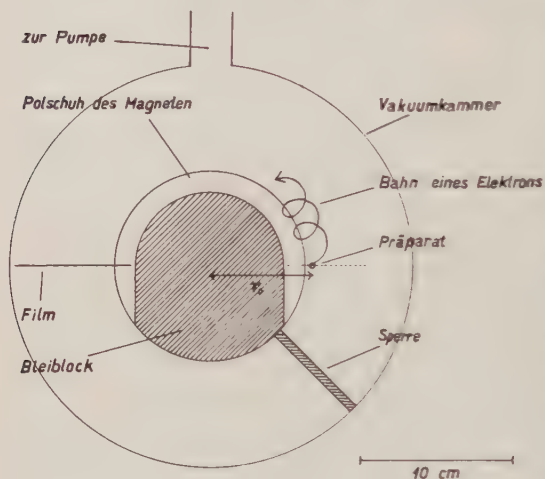


Abb. 1.

verschoben werden. Als Aufnahmematerial diente Kodak, Blue Brand X-Ray Film, Ultra Speed, Code 3. Zur Erhöhung der Empfindlichkeit wurde der Film bei den Aufnahmen zwischen zwei Verstärkerfolien gelegt. Die Fluoreszenzschicht bestand aus einem Gemisch von Calcium- und Magnesiumwolframat, das fein pulverisiert mit einem Bindemittel auf eine 0,03 mm Glimmerfolie fixiert war. Bei

Verwendung von Absorbern wurde derselbe auf die obere Glimmerfolie gelegt und mit dieser durch einen geeigneten Rahmen auf den Film gedrückt.

### Versuchsergebnisse.

Wählt man die Entfernung  $r_0$  des Präparates vom Zentrum der Polschuhe so, daß dieses sich etwa 5 mm innerhalb des Polschuhrandes befindet, so zeigt der Film eine ovale unscharf begrenzte Schwärzung, die in der Umgebung der Entfernung  $r_0$  vom Zentrum liegt. Ihr radialer Durchmesser bei verschiedenen Feldstärken und ihre Verschiebung mit der Lage der Quelle stimmen mit den Eigenschaften überein, die man für die Betastrahlung des Präparates erwarten kann. Vergrößert man  $r_0$ , so wächst infolge der Abnahme der Feldstärke der radiale Durchmesser des geschwärtzten Fleckes an und seine Begrenzung nach außen zu wird diffuser. Außerdem erscheint auf dem Film ein schmaler Bogen intensiver Schwärzung, der etwa dem Verlauf der Kraftlinien im Streufeld folgt. Seine Lage auf



dem Film ist ungefähr durch die Quellenposition  $r_0$  bestimmt und ändert sich mit dieser in gleichem Sinn und um gleiche Beträge. Mit weiter zunehmendem  $r_0$  hebt sich dieser Bogen immer deutlicher von der diffuser werdenden übrigen Schwärzung ab. Würde man annehmen, daß es sich bei dieser Konzentration um die Wirkung langsamer Betapartikeln und Sekundärelektronen, die von der Präparathülle ausgehen, handelt, so folgt aus der Breite dieses Bogens, gemessen in radialer Richtung, und der Feldstärke am Ort des Präparates, daß es sich um Elektronen mit  $H_p$ -Werten um 1000 Gauß.cm und darunter handeln müßte, was einer Elektronenenergie von höchstens

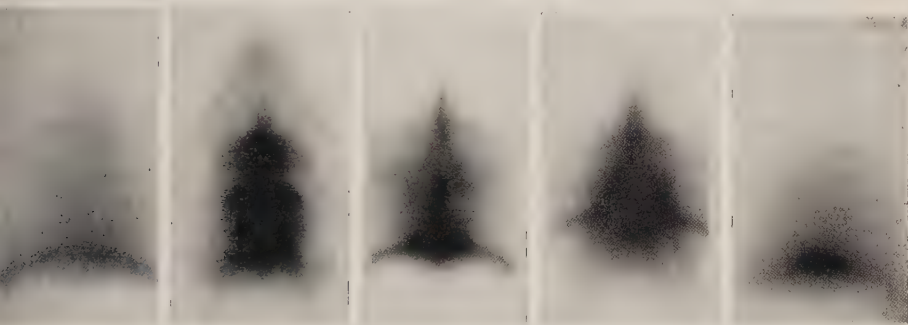


Abb. 2.

Abb. 3.

Abb. 4.

Abb. 5.

Abb. 6.

0,1 MeV entspricht. Um die Stichhaltigkeit dieser Annahme zu klären, wurden Versuche angestellt, bei denen der Film mit Bleiabsorbern verschiedener Stärke bedeckt wurde. Einige charakteristische Aufnahmen dieser Art sind in Abb. 2 bis 6 wiedergegeben. (Bei diesen Abbildungen befindet sich das den Polschuhen zugekehrte Ende des Films unten.)

Die Versuchsdaten sind aus nachfolgender Tabelle zu entnehmen:

Abbildung Nr.	Präparatabstand vom Polschuh, $r_0$ in mm	Präparatstärke, in Millicurie	Magnetische Feldstärke im homogenen Feld, in Gauß	Magnetische Feldstärke am Ort des Präparates, in Gauß	Expositionszeit der Aufnahme	Stärke des Bleiabsorbers, in g/cm <sup>2</sup>
2	79	380	9700	4400	10 sec	0,116
3	79	380	9700	4400	6 min	0,690
4	79	380	11900	5400	4 min	0,583
5	89	260	10800	3000	5 min	0,583
6	79	120	11900	5400	150 min	2,61

Aus diesen Aufnahmen kann folgendes geschlossen werden:

1. Die beschriebene bogenförmige Konzentration kann nicht auf langsame Elektronen zurückgeführt werden, da ihr Durchdringungsvermögen in Blei mindestens  $2,61 \text{ g cm}^2$  beträgt (Abb. 6). Das ist doppelt soviel wie für die schnellsten Elektronen von RaC (3,15 MeV) und mit Elektronen von etwa 0.1 MeV Energie unvereinbar.

2. Bei Absorberstärken um 0,5 mm Blei ist eine zweite Erscheinung deutlich sichtbar, welche durch mehrere radialgerichtete Spitzen gekennzeichnet ist. Es scheint kaum möglich, Energiekonzentrationen dieser Gestalt der Wirkung von Betapartikeln zuzuschreiben, welche periodische Trochoidenbahnen beschreiben: In Abb. 4 ist die flache bogige Struktur der Schwärzung, welche für diese Betastrahlen zu erwarten ist<sup>5)</sup>, deutlich von den scharfen ineinandergeschobenen Spitzen dieser Erscheinung zu trennen. Die Struktur der Erscheinung ändert sich stark mit der Variation der magnetischen Feldstärke und der Lage der Quelle im Feld (Abb. 3, 4, 5).

Weitere Untersuchungen sind im Gange.

Ich danke Herrn Prof. Dr. *F. Ehrenhaft* für das große Interesse, das er dieser Arbeit entgegenbringt, und Herrn Prof. Dr. *R. Herzog* für ihre Förderung durch zahlreiche Diskussionen. Frau Prof. Dr. *B. Karlik* vom Wiener Radiuminstitut bin ich für die Beistellung der radioaktiven Präparate zu Dank verpflichtet.

<sup>5)</sup> *Thibaud*, C. R. 225, 934 (1947).



# Eine einfache Methode zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstante von Flüssigkeiten im cm-Wellen-Gebiet.

Von

**F. Reder und E. Hafner.**

Institut für Theoretische Physik der Universität Graz.

Mit 4 Abbildungen.

(Eingelangt am 11. Juli 1950).

## Zusammenfassung.

Nach einem Überblick über die verschiedenen Meßverfahren wird eine Verbesserung der bisher üblichen Methoden mit koaxialem Kreiszylinder (Lecherleitungsmethoden) angegeben. Unsere Methode ermöglicht die Verwendung der gebräuchlichen koaxialen Wellenmesser zur DK.-Bestimmung ohne erheblichen Umbau. Sie ist besonders gut für Flüssigkeiten geeignet, jedoch, worauf am Ende der Arbeit hingewiesen wird, auch für feste Stoffe und für Pulver brauchbar. Der Materialbedarf ist verhältnismäßig gering, die Genauigkeit sehr hoch (0,5 Promille). Der Vollständigkeit halber werden auch die Formeln für den Verlustwinkel angegeben. Die Meßergebnisse für Benzol, Toluol, Tetrachlorkohlenstoff und Paraffinöl sind in Tabellen zusammengestellt.

## Verwendete Bezeichnungen:

Alle Angaben im praktischen Maßsystem (A, V, cm).

$\mathcal{E}, \mathcal{H}$  = Amplituden der elektrischen, bzw. magnetischen Feldstärke.

$\epsilon_0 \epsilon, \mu_0 \mu$  = Dielektrizitätskonstante (DK.), bzw. Permeabilität.

$x$  = Gesuchte DK., bezogen auf Vakuum (Index  $L$ , wenn auf Luft bezogen).

$\omega = 2\pi\nu$  = Kreisfrequenz des Senders.

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  = Kreiswellenzahl.

$\lambda, \lambda_m$  = Wellenlänge in Luft, bzw. im Dielektrikum.

$\Delta L, \Delta L_m$  = Verschiebung des Innenleiters zwischen zwei aufeinanderfolgenden Resonanzstellen in Luft, bzw. im Dielektrikum.

$\rho, R$  = Radius des Innen-, bzw. Außenleiters.

$a = \frac{R}{\rho}$  = Abkürzung für Radienverhältnis.

$\sigma, \sigma_m$  = Spez. Leitfähigkeit des Dielektrikums, bzw. der Metallhülle.

$\operatorname{tg} \delta$  = Tangente des Verlustwinkels.

$$\Re = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2 \sigma_m}} = \text{Spez. Wirbelstromwiderstand der Metallhülle.}$$

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  = Grundvektoren der Zylinderkoordinaten.

## 1. Einleitung.

Zur Bestimmung der DK. von dielektrischen Stoffen wurden im Laufe der Zeit zahlreiche Methoden entwickelt [1], die man nach verschiedenen Gesichtspunkten in Gruppen zusammenfassen kann. Entweder man ordnet sie nach den erforderlichen Meßeinrichtungen oder nach den Eigenschaften des zu untersuchenden Materials.

Nach der Meßeinrichtung unterscheiden wir:

1. Methoden der Wellenfortpflanzung in metallischen Leitern. Die Probe befindet sich in einer auf laufende Welle abgestimmten Zweigleitung, bzw. in einer kurzgeschlossenen Leitung, und man mißt entweder den komplexen Reflexions- oder Durchlässigkeitsfaktor, bzw. die Knotenverschiebung. Es handelt sich also um die Messung von Amplituden, Phasenwinkeln oder Knotenverschiebungen.

2. Methoden der elektromagnetischen Wellenfortpflanzung im freien Raum. Die Probe befindet sich zwischen Sendeantenne und Empfänger. Gemessen werden wieder Amplituden oder Phasenwinkel. Diese Methoden sind besonders für die industrielle Untersuchung größerer Materialplatten geeignet.

3. Die Methoden der Hohlraumresonator-Schwingungen. Metallisch ausgekleidete Hohlräume (aus Gründen der einfachen technischen Herstellung meist einfache oder koaxiale Kreiszylinder), in welche das Material in Form von Scheiben oder Stäbchen eingebracht wird, werden zu Eigenschwingungen angeregt. Gemessen werden die Wellenlängen in Luft und im Dielektrikum. Die DK., bzw. der Verlustwinkel  $\operatorname{tg} \delta$  wird sodann aus der Eigenwertgleichung, bzw. aus der Feldverteilung und der Theorie des Skin-Effektes berechnet [2]. Diese Methoden eignen sich besonders für rasche und präzise Messungen.

Wenn wir hingegen von den Eigenschaften des zu untersuchenden Materials ausgehen, können wir die bekannten Meßverfahren wie folgt einteilen:

- a) Methoden für verlustreiche oder verlustarme Materialien.
- b) Methoden für Scheiben- oder Stabform des Materials.
- c) Methoden für geringe oder große Materialmenge.
- d) Methoden für homogene oder inhomogene Stoffe. Bei inhomogenen Stoffen sind Methoden vorzuziehen, welche die Verwendung größerer Mengen gestatten, damit man einen guten Mittelwert erhält.



e) Methoden für feste, pulverförmige, flüssige oder gasförmige Substanzen.

Bevor wir nun näher auf unsere Methode eingehen, noch einige Worte darüber, was bei DK.- und tg  $\delta$ -Messungen im allgemeinen zu beachten ist:

1. Höchste Frequenzkonstanz des Generators während der Messung (Verwendung entsprechender Stabilisierungsgeräte).

2. Lose Ankopplung der Hohlräume und Wellenmesser an den Generator, damit sie möglichst wenig auf die Generatorfrequenz zurückwirken.

3. Vermeidung von Verlusten durch Abstrahlung und schlechte Hochfrequenzkontakte.

4. Versilberung und gute Politur aller Flächen im Inneren der Leiter. Oxyd- oder Sulfidbildung und Oberflächenrauigkeiten erhöhen die Wirbelstromverluste und damit die Dämpfung.

5. Sorgfältige Reinigung der Meßsubstanz, besonders von etwa enthaltenem Wasser.

6. Genaue Anpassung der Probe an die metallische Berandung. Dies ist besonders wichtig bei Verwendung von Schwingungstypen [2], bei welchen das elektrische Feld an der Berandung nicht verschwindet (z. B. Lechertyp!).

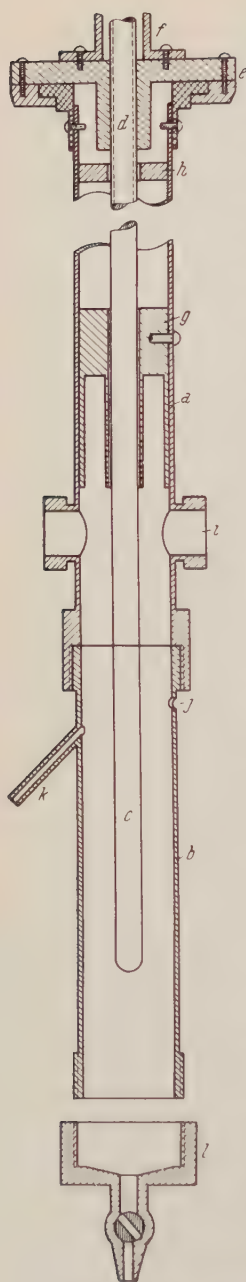
7. Eventuelle Beachtung von Meniskusbildung und Verdampfung, wenn die Methode auch eine Messung des Materialvolumens erfordert.

8. Halbwertsbreitenmessungen durch Veränderung der Senderfrequenz zur Bestimmung des Verlustwinkels liefern nur dann richtige Ergebnisse, wenn bei der Frequenzvariation die Senderleistung konstant bleibt. Da diese Forderung im allgemeinen nur bei sehr kleinen Bandbreiten erfüllt ist, sind Verlustwinkelmessungen meistens mit einer gewissen Unsicherheit behaftet.

9. Die Möglichkeit einer Temperaturregelung soll gegeben sein.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wollen wir uns jetzt dem eigentlichen Zweck dieser Arbeit zuwenden, nämlich der Beschreibung einer Meßmethode mit koaxialem Kreiszyylinder, welche besonders für Flüssigkeiten eine sehr hohe Genauigkeit in der DK.-Bestimmung gewährleistet.

In einem lotrecht aufgestellten koaxialen Wellenmesser mit freiem Ende (Abb. 1) wird zunächst durch Verschiebung des Innenleiters zwischen zwei Resonanzstellen die Luftwellenlänge gemessen. Dann wird die Meßflüssigkeit in den unteren, abschraubbaren Teil des Außenrohres bis zu einer durch das Abflußrohr definierten Höhe eingefüllt und nochmals die Verschiebung des Innenleiters zwischen zwei Resonanzstellen *inner-*



halb der Flüssigkeit gemessen. Eine Resonanzstelle bezeichnen wir als innerhalb der Flüssigkeit liegend, wenn im Augenblick der Resonanz das freie Ende des Innenleiters in die Flüssigkeit eingetaucht ist. Die durch das Eintauchen des Innenleiters verdrängte Flüssigkeit fließt durch das genannte Abflußrohr ab. Wie im Anhang streng bewiesen wird, können wir wegen des konstanten Abstandes: Flüssigkeitsspiegel—Kurzschlußebene die einfache DK.-Formel, welche wir von der homogen gefüllten Lecherleitung her kennen, auch hier anwenden, obwohl unser Hohlraum nur zum Teil mit dem Dielektrikum gefüllt ist:

$$x_f = \left( \frac{\Delta L}{\Delta L_m} \right)^2$$

Diese verbesserte Lechermethode bietet folgende Vorteile:

1. Geringster experimenteller Aufwand, da der ohnehin stets notwendige Wellenmesser ohne wesentlichen Umbau selbst als Meßhohlraum verwendet wird.
2. Eignung vor allem für Flüssigkeiten, aber auch für feste und pulverförmige Substanzen.
3. Einfachster Bau der strengen Formel.
4. Möglichkeit der Anwendung in einem verhältnismäßig großen Wellenlängenbereich.
5. Relativ geringe Substanzmengen.
6. Unabhängigkeit der DK.-Bestimmung von Volumens-, Dichte-, Dampfdruck-Messung usw.
7. Da die Räume I und II von der Flüssigkeit nicht erfüllt werden, braucht man die Kopplungsstellen nicht besonders abzudichten. Ferner kann dadurch die Flüssigkeit das in den Zuleitungen verwendete dielektrische Zwischenmaterial nicht angreifen.

Abb. 1. Querschnitt durch den Wellenmesser.  $a$  = Außenleiter,  $b$  = abschraubbarer Teil des Außenleiters,  $c$  = Innenleiter,  $d$  = Spindel für Innenleiter,  $e$  = Nonius,  $f$  = Rohr, an dessen oberem Ende das Handrad, bzw. das Friktionsgetriebe für Motorantrieb befestigt ist,  $g$  = obere Begrenzung des Hohlraumes = Kurzschluß,  $h$  = Scheibe mit Bohrung und Nase, welche in die Längsnut der Spindel eingreift und dadurch deren Drehung verhindert,  $i$  = Kopplungsansatz,  $j$  = Einfüllöffnung,  $k$  = Abflußrohr,  $l$  = Abschluß für Außenleiter mit Abflußbahn.



## 2. Experimentelle Durchführung der DK.-Bestimmung bei Flüssigkeiten.

Für die Meßtechnik sind zwei Fälle der Raumerfüllung (Abb. 2) von Bedeutung:

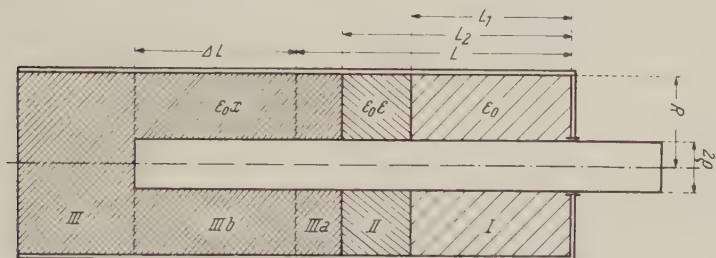


Abb. 2. Skizze zu den eingeführten Bezeichnungen.

1. Medium I und II: Luft.

2. Medium I: Luft, Medium II: Abschlußplatte aus einem verlustarmen Dielektrikum für das Medium III. Dadurch kann man z. B. stark hygroskopische Meßsubstanzen wenigstens teilweise gegen die Luftfeuchtigkeit schützen.

Die gesamte Meßanlage ist denkbar einfach (Abb. 3). Sie besteht aus folgenden Teilen:

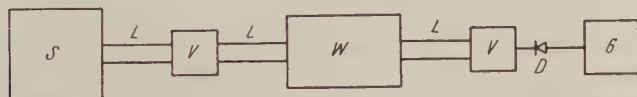


Abb. 3. Blockschema zur Meßanlage.

$S$  = Ultrahochfrequenzsender, z. B. Magnetron, Bremsfeldröhre oder Klystron. Wichtig ist eine gute Frequenzkonstanz des Senders.

$L$  = Flexible, abgeschirmte Lecherleitung zur Energieübertragung.

$W$  = Wellenmesser nach dem Lecherprinzip: zwei koaxiale, versilberte Metallrohre (Radienverhältnis  $a$ ), Innenrohr durch eine Spindel mit Präzisionsgewinde axial verschiebbar, Außenrohr um etwa 5 cm länger als Innenrohr bei maximaler Länge und unten durch einen Hahn verschlossen. Ablesegenauigkeit:  $10^{-3}$  cm mit Schätzung der 4. Dezimale. Innen- und Außenleiter sind oben durch einen Hochfrequenz-Federkontakt elektrisch kurzgeschlossen.

Die Ankopplung an Sender und Indikator erfolgt in Nähe des Kurzschlusses durch induktive Schleifen oder kapazitive Antennenstifte.

$D$  = Kristallgleichrichter.

$V$  = Vierpole zur günstigsten Anpassung der einzelnen Schaltelemente aneinander.

$G$  = Galvanometer als Resonanzindikator ( $10^{-7}$  A Tstr.).

Der Aufbau des Wellenmessers geht aus Abb. 1 hervor. Damit nur der einfache Lecher-Schwingungstyp ( $E_r, H_z$ ) angeregt wird, muß der Radius des Außenleiters der Bedingung genügen:

$$2\pi R \geq \lambda.$$

Z. B.: Soll der Wellenmesser im Bereich  $\lambda = 14$  bis  $7$  cm verwendet werden, muß  $R \leq 1,12$  cm sein.

Damit ferner die Eigendämpfung des Hohlraumes ein Minimum wird, soll  $a = 3,61$  betragen: dabei sind Abweichungen um  $\pm 0,5$  von diesem Idealwert noch zulässig [4]. Wählt man nämlich  $a = 3$ , braucht man weniger Meßsubstanz. Die Dicke des Innenleiters ist aus Festigkeitsgründen nach unten zu begrenzt!

Da am freien Ende des Innenleiters bekanntlich ein kleines Störfeld auftritt, soll das freie Ende bei der ersten verwendeten Resonanz (von oben gezählt) etwa 2 cm tief in die Meßsubstanz eintauchen. Dann macht sich gegenüber dem Störfeld bei der zweiten Resonanz keine Unsymmetrie und damit keine Rückwirkung auf das Meßergebnis bemerkbar. Aus dem gleichen Grunde soll die Bodenfläche des Außenleiters mindestens 4 cm vom freien Ende des Innenleiters bei tiefster Resonanzstellung entfernt sein.

Zur bequemeren Verschiebung des Innenleiters zwischen zwei Resonanzstellen kann man die Spindel über ein Friktionsgetriebe mit einem Gleichstrommotor antreiben. Dieser wird kurz vor Erreichung der Resonanzstelle ausgeschaltet und die Feineinstellung mit der Hand vorgenommen.

Die Steigung der Spindel beträgt 1 mm Umdrehung.

Ein am Spindelkern befestigtes Schneckenrad treibt eine gezahnte Teilscheibe, auf welcher die Verschiebung des Innenleiters in Zentimetern und Millimetern ablesbar ist. Die Ablesung der  $10^{-3}$  cm erfolgt auf der Noniusscheibe.

Gemessen werden natürlich nur Verschiebungen des Innenleiters nach unten.

Damit man die Verschiebung des Innenleiters eventuell auch mit einem Vertikalkomparator messen kann, ist der Spindelkern nach oben durch das Antriebsrohr hindurch verlängert. Auf das Ende wird eine kleine Glasplatte mit horizontaler Strichmarke aufgesetzt, auf welche das Fadenkreuz des Fernrohres eingestellt wird. Dadurch kann man Temperatureinflüsse auf den Innenleiter bei Verwendung von Thermostaten und Spindelfehler ausschalten.



Das Einfüllen der Flüssigkeit erfolgt entweder durch ein kleines Loch knapp über dem Abflußrohr oder indem man den unteren Teil des Außenleiters abschraubt (zähe Flüssigkeiten oder feste Stoffe). Arbeitet man stets nur bei einer festen Frequenz, so kann man die Nahtstelle zwischen abschraubbarem Teil und übrigem Wellenmesser an einen Stromknoten legen (zur Vermeidung dämpfender Übergangswiderstände), welcher sich etwa in der Entfernung:

$$(2n+1) \cdot \lambda/4, \quad n=1, 2 \dots$$

vom Kurzschluß befindet.

Will man die Temperatur während einer Meßreihe variieren, so umgibt man den abschraubbaren Teil des Außenleiters mit einem Mantel, durch welchen man die Thermostatenflüssigkeit strömen läßt.

Bei Messungen stark flüchtiger Stoffe (z. B. Benzol, Toluol usw.) führt man die Kapillare eines kleinen Vorratsgefäßes (Abb. 4) durch das genannte Einfüllloch ein und reguliert mit dem Hahn den Zufluß so, daß die Flüssigkeit in konstanten Abständen aus dem Abflußrohr abtropft. Dadurch wird das Verdunsten kompensiert und der Flüssigkeitsspiegel auf der erforderlichen konstanten Höhe gehalten. Wichtig ist, daß das Kapillarende etwas in die Flüssigkeit eintaucht, da sonst die Oberfläche durch die Tropfen wellig wird, was sich durch schwankende Galvanometerausschläge bemerkbar macht. Versuche haben gezeigt, daß sich das Einführen der Kapillare (kleine Feldstörungen) innerhalb der Meßgenauigkeit nicht auf das Ergebnis auswirkt.

Damit der Innenleiter beim Eintauchen in die Flüssigkeit keine Luftbläschen mitnimmt, ist sein freies Ende nicht eben, sondern etwas kegelförmig.

Besonders bei Ölen ist darauf zu achten, daß die verdrängte Menge Zeit hat, abzufließen, die Bewegung des Innenleiters also nur langsam erfolgt.

Der Meßvorgang selbst spielt sich nun wie folgt ab:

1. Sobald der Generator im thermischen Gleichgewicht ist, werden zunächst die zwei Vierpole so eingestellt, daß bei leerem, auf Resonanz eingestelltem Wellenmesser das Galvanometer (mit Shunt) maximalen Ausschlag gibt. Dann werden Eingangs- und Ausgangsvierpol etwa im Verhältnis 4 : 1 so verstimmt, daß das Galvanometer ohne Shunt beinahe Endausschlag zeigt. Dies gibt günstige Kopplungsverhältnisse.

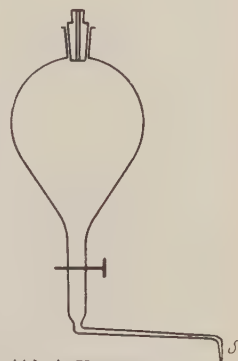


Abb. 4. Vorratsgefäß, dessen kapilläres Ende so möglichst nahe an der Innenfläche des Außenleiters liegen soll.

2. Nun wird zunächst die halbe Resonanzwellenlänge des leeren Hohlraumes gemessen ( $= \Delta L$ ). Dazu bestimmt man durch Verschiebung des Innenleiters den Abstand von zwei aufeinanderfolgenden Resonanzstellen.

3. Hierauf wird die vorher richtig temperierte Flüssigkeit eingefüllt, eventuell das Vorratsgefäß angebracht und einreguliert. Der Innenleiter wird eingetaucht und nun wiederum der Abstand zweier Resonanzstellen ermittelt. Gibt  $\Delta L_m$ .

Es ist zur teilweisen Kompensation der Spindelfehler vorteilhaft, bei der Messung in Luft und im Dielektrikum Knoten gleicher Ordnung zu wählen. Ein Knoten (Resonanzstelle) hat die Ordnung  $n$ , wenn die Länge des Innenleiters vom Kurzschluß ab  $(2n+1) \cdot \lambda/4$  beträgt.

4. Will man dieselbe Flüssigkeit nochmals messen, gibt es zwei Möglichkeiten:

a) Stark flüchtige Substanzen: Innenleiter zurückschrauben, Flüssigkeit nachfüllen und Messung wiederholen.

b) Nicht flüchtige Substanzen: Unteren Teil des Außenleiters abschrauben, Innenleiter trocknen, Flüssigkeit nachfüllen, Innenleiter zurückschrauben, Außenleiter wieder anschließen und Messung wiederholen.

Man vergesse nicht, vor jeder Einzelmessung den sogenannten Arbeitspunkt (Anodenspannung, Heizstrom usw.) des Generators zu kontrollieren, da fast alle Generatoren im Laufe der Zeit einen Frequenzgang aufweisen.

Die folgende Tabelle enthält die von uns nach diesem Verfahren bestimmten DK.-Werte einiger Substanzen und die mit dem Refraktometer gemessenen optischen Brechungsquotienten ( $D$ -Linie von Na) zur Charakterisierung des Reinigungsgrades der Flüssigkeiten. Diesen Werten sind die in der Literatur [3] gefundenen gegenübergestellt.

Da uns kein Frequenznormal zur Überprüfung des Wellenmessers auf absolute Genauigkeit zur Verfügung stand, können wir nur die mittleren Streuungen angeben.

Material	$x$	$n_D$ gemessen	$\vartheta^\circ$	$\varepsilon_{\text{stat}}$	$n_D$
Benzol. . . . .	$2,2817 \pm 3 \cdot 10^{-4}$	1,4981	23,2	2,292	1,50144 ( $20^\circ$ )
	$2,2826 \pm 2 \cdot 10^{-4}$	1,4983	24		
Toluol. . . . .	$2,381 \pm 4 \cdot 10^{-3}$	1,4938	23,6	2,39	1,4889
Tetrachlorkohlenstoff	$2,236 \pm 1 \cdot 10^{-3}$	1,4593	22	2,246	1,46072
Paraffinöl. . . . .	$2,1659 \pm 2 \cdot 10^{-4}$	1,4753	22	2,1194	—
Petroleum . . . . .	$2,1519 \pm 1 \cdot 10^{-4}$	1,4607	22	2,12	—



### 3. Bestimmung des Verlustwinkels.

Da die Menge der Meßsubstanz relativ zum gesamten Energievolumen groß ist, ist die beschriebene Methode zur  $\operatorname{tg} \delta$ -Bestimmung nicht sehr geeignet. Außerdem ist die entsprechende Formel sehr unhandlich. Der Vollständigkeit halber wollen wir sie jedoch angeben.

Wir gehen aus von den bekannten Beziehungen:

$$\operatorname{tg} \delta \equiv \frac{\sigma}{\varepsilon_0 x \omega}$$

$$d \equiv \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\bar{Q}_W + Q_D \cdot \sigma}{\omega \bar{W}} \quad d_0 = \frac{\bar{Q}_{W_0}}{\omega \bar{W}_0}$$

Dabei bedeuten die einzelnen Größen:

$d, d_0$  = Relative Halbwertsbreite, wenn der Innenleiter in die Meßsubstanz eintaucht, bzw. bei leerem Hohlraum. Diesen Wert erhält man experimentell, wenn man die Verstimmung der Senderwellenlänge zwischen zwei Halbwertspunkten der Resonanzkurve durch die zugehörige Resonanzwellenlänge dividiert.

$Q_W$  = Zeitlich mittlere Wärmeverlustleistung an der metallischen Hülle bei Resonanz mit Meßsubstanz.

$Q_{W_0}$  = Dasselbe bei leerem Hohlraum.

$\sigma, Q_D$  = Zeitlich mittlere Wärmeverlustleistung im Dielektrikum.

$\bar{W}, \bar{W}_0$  = Zeitlich mittlerer elektromagnetischer Energieinhalt des Hohlraumes.

Die einzelnen Terme werden wie folgt berechnet:

$$\bar{W} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{4} \int E^2 d\tau + \frac{\mu_0}{4} \int H^2 d\tau$$

$$\bar{Q}_W = \frac{1}{2} \Re \int H_\varphi^2 df$$

$$\bar{Q}_D = \frac{1}{2} \int E^2 d\tau$$

Durch Einsetzen der im Anhang gefundenen Feldverteilung findet man:

$$\bar{W} = \frac{\pi k^2 \operatorname{nlg} a}{2 \varepsilon_0} [L_2 + A_3^2 (L - L_2)]$$

$$Q_D = \frac{\pi k^2 \operatorname{nlg} a \cdot \omega A_3^2 (L - L_2)}{2 \varepsilon_0} \left[ 1 + \frac{\sin 2k \sqrt{x(L - L_2)}}{2k \sqrt{x(L - L_2)}} \right]$$

$$Q_W = \pi \alpha^2 (1+a) \left\{ \operatorname{nlg} a + \frac{L_2}{2R} \left[ 1 - \frac{\sin 2k | \bar{x}(L-L_2) |}{2k | x(L-L_2) |} \right] + \frac{A_3^2 (L-L_2)}{2R} \left[ 1 - \frac{\sin 2k | x(L-L_2) |}{2k | x(L-L_2) |} \right] \right\}$$

$$A_3^2 = \left( \frac{\cos k L_2}{\sin k | x(L-L_2) |} \right)^2$$

$$\bar{W}_0 = \frac{\pi k^2 L_0 \operatorname{nlg} a}{2 \varepsilon_0}$$

$$Q_{W_0} = \pi \alpha^2 \Re \left\{ \operatorname{nlg} a + \frac{L_0}{2R} (1+a) \right\}$$

Führt man noch als Abkürzungen ein (die ersten drei Ausdrücke sind bei vorgegebenem Wellenmesser und fester Frequenz Apparatkonstanten und brauchen daher nur einmal berechnet werden!):

$$\alpha = \frac{L_0}{2 \left[ 1 + \frac{L_0}{2R} \frac{1+a}{\operatorname{nlg} a} \right]} = \frac{\Re}{\mu_0 \alpha d_0}$$

$$\beta = 2 + \frac{L_2}{R} \frac{1+a}{\operatorname{nlg} a} \left[ 1 + \frac{\sin 2k L_2}{2k L_2} \right]$$

$$\gamma = \frac{1-a}{R \operatorname{nlg} a}$$

$$y = \frac{\sin 2k | x(L-L_2) |}{2k | x(L-L_2) |}$$

erhält man die gesuchte tg  $\delta$ -Formel:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{d \left[ \frac{L_2}{L-L_2} + A_3^2 \right] - d_0 \alpha \left[ \frac{1}{L-L_2} - \gamma A_3^2 (1-y) \right]}{A_3^2 (1-y)}$$

Wir fanden damit z. B. für Benzol folgende Werte:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \delta = 4,1 \cdot 10^{-4} \\ \sigma = 1 \cdot 10^{-6} \end{array} \right\} \text{ bei } x = 2,2860.$$

#### 4. Schlußbetrachtung.

Die beschriebene Methode der DK.-Bestimmung ist anwendbar in einem Wellenlängenbereich zwischen 30 cm und 3 cm. Über 30 cm würde der Wellenmesser zu groß werden, bzw. der Flüssigkeitsbedarf zu erheblich, unter 3 cm wird der Innenleiter zu dünn und die Dämpfung zu stark.



Will man auch feste Stoffe damit messen, fertigt man daraus am besten mehrere Scheiben mit zentraler Bohrung für den Innenleiter an, welche genau in den Hohlraum hineinpassen. Da das elektrische Feld an der metallischen Berandung nicht verschwindet, ist sehr genaues Einpassen erforderlich.

Bei Messung von Pulvern wird ein zentrisch durchbohrter Boden eingeschraubt, durch dessen Öffnung ein dielektrischer Stab gesteckt wird. Dieser besitzt genau denselben Durchmesser wie der Innenleiter und wird an dessen freiem Ende eingeschraubt. Das Pulver wird in den Außenleiter eingefüllt und mit einer Trolitulscheibe abgedeckt. Die Messung erfolgt wie früher. Der Verlängerungsstab hat nur die Aufgabe, im Pulverraum für den nachfolgenden Innenleiter die Öffnung freizuhalten. Da die DK. von Pulvern auf die Dichte reduziert wird, wiegt man die eingefüllte Pulvermenge und mißt das Volumen.

### 5. Anhang.

Gesucht wird die elektromagnetische Feldverteilung und die Eigenwertgleichung eines einseitig kurzgeschlossenen kreiszylindrischen, coaxialen Hohlraumes, der in axialer Richtung von drei verschiedenen Medien der DK.-Werte  $x$ ,  $\varepsilon$ , 1 erfüllt ist (Abb. 2).

Es handelt sich also um die Integration der *Maxwellschen* Gleichungen unter Berücksichtigung der Randbedingung:  $\mathfrak{E}_t = 0$  an der metallischen Umrandung und der Bedingung:  $\frac{\partial E}{\partial z} = 0$  am freien Ende. Ferner müssen im Hohlraum die Grenzbedingungen: Stetigkeit der Tangentialkomponenten von  $E$  und  $H$  an den Trennflächen zwischen zwei verschiedenen Medien erfüllt werden.

Über die Lösung derartiger Aufgaben siehe z. B. [2].

Der Vorgang soll daher im folgenden nur angedeutet werden:

Wir setzen eine so kleine Dämpfung des Hohlraumes voraus, daß wir die elektromagnetischen Schwingungen als frei ansehen können, und berücksichtigen die Dämpfung dann mit Hilfe der Theorie des Skin-Effektes. (Kap. 3.)

Wir gehen aus von den *Maxwellschen* Gleichungen in der zeitfreien Form:

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathfrak{S} &= j\omega \varepsilon_0 \varepsilon \mathfrak{E} \\ \text{rot } \mathfrak{E} &= -j\omega \mu_0 \mathfrak{S}\end{aligned}$$

und führen durch den Ansatz:

$$\mathfrak{S} = j\omega \text{rot } (U \mathbf{e}_z)$$

das Vektorpotential  $U$  ein, für welches wir die skalare Wellengleichung:

$$\Delta U + \varepsilon k^2 U = 0$$

erhalten. Diese nimmt in Zylinderkoordinaten die Form an:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \varepsilon k^2 U - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Mit dem Ansatz:

$$U = R(r) \cdot Z(z)$$

erhalten wir unter Beachtung der Lecherbedingung:

$$E_z = \frac{k^2}{\varepsilon_0} U + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

der Randbedingungen:

$$z = 0: E_r^I = 0,$$

$$z = L: \frac{\partial E_r^{\text{III}}}{\partial z} = 0$$

und der Stetigkeitsbedingungen:

$$z = L_1: E_r^I = E_r^{\text{II}}, \quad H_\varphi^I = H_\varphi^{\text{II}}$$

$$z = L_2: E_r^{\text{II}} = E_r^{\text{III}}, \quad H_\varphi^{\text{II}} = H_\varphi^{\text{III}}$$

die gesuchte Feldverteilung und die Eigenwertgleichung:

$$\text{I. } E_r = -\frac{k}{\varepsilon_0} \frac{1}{r} \sin(kz) \quad H_\varphi = -j\omega \frac{1}{r} \cos(kz)$$

$$\text{II. } E_r = -\frac{A_2 k}{\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{r} \sin(k \sqrt{\varepsilon} z - a_2) \quad H_\varphi = -j\omega \frac{A_2}{r} \cos(k \sqrt{\varepsilon} z - a_2)$$

$$\text{III. } E_r = -\frac{A_3 k}{\varepsilon_0 \sqrt{x_L}} \frac{1}{r} \cos[k \sqrt{x_L}(z - L)] \quad H_\varphi = -j\omega \frac{A_3}{r} \sin[k \sqrt{x_L}(z - L)]$$

$$a_2 = \arctg[\sqrt{\varepsilon} \cdot \tg(kL_1)] - k \sqrt{\varepsilon} L_1$$

$$A_2 = \sqrt{1 + \varepsilon} \cdot \tg^2 kL_1 \cdot \cos(kL_1)$$

$$A_3 = \left[ \varepsilon \sin(kL_1) \cdot \sin[k \sqrt{\varepsilon}(L_2 - L_1)] - \cos(kL_1) \cdot \cos[k \sqrt{\varepsilon}(L_2 - L_1)] \right] \sin[k \sqrt{x_L}(L_2 - L)]$$

$$\left[ \varepsilon \tg(kL_1) - \tg(k \sqrt{\varepsilon} L_1) \right] \left[ \varepsilon + \sqrt{x_L} \tg(k \sqrt{\varepsilon} L_2) \cdot \tg[k \sqrt{x_L}(L_2 - L)] \right] \\ \left[ \varepsilon \tg(kL_1) + \tg(k \sqrt{\varepsilon} L_1) \right] = 1 \quad \left[ \varepsilon \cdot \tg(k \sqrt{\varepsilon} L_2) - \sqrt{x_L} \tg[k \sqrt{x_L}(L_2 - L)] \right]$$

Nun denken wir uns die erste bei  $L > L_2$  mögliche Resonanz eingestellt und dann den Innenleiter so lange in  $z$ -Richtung verlängert, bis wieder Resonanz herrscht ( $L = \Delta L_m$ ).

Dadurch haben wir in der letzten Gleichung  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $\varepsilon$  und  $x_L$  nicht, wohl aber  $L$  um  $\Delta L_m$  geändert.

Also hat sich in der Eigenwertgleichung nur das Argument:  $k \sqrt{x_L} (L_2 - L)$  verändert. Es muß daher gelten:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} [k \sqrt{x_L} (L_2 - L - \Delta L_m)] &= \operatorname{tg} [k \sqrt{x_L} (L_2 - L)] \\ k \sqrt{x_L} (L_2 - L - \Delta L_m) &= k \sqrt{x_L} (L_2 - L) - m\pi \quad m = 1, 2 \dots \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \Delta L = \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

$$x_L = \left( m \frac{\Delta L}{\Delta L_m} \right)^2$$

Dies ist die von uns verwendete Formel. Multipliziert man noch  $x_L$  mit der DK. von Luft, erhält man die auf Vakuum bezogene DK.:  $x$ :

$$x = \varepsilon_L \left( \frac{\Delta L}{\Delta L_m} \right)^2$$

Zum Schluß seien noch die Integrationskonstanten für einige Spezialfälle angegeben:

Raum I und II von Luft erfüllt:

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ A_2 &= 1 \\ A_3 &= \sqrt{1 + x_L \operatorname{tg}^2 (kL_2)} \cdot \cos (kL_2) \end{aligned}$$

Raum I, II und III vom gleichen Medium erfüllt:

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ A_2 &= 1 \\ A_3 &= 1. \end{aligned}$$

Unserem verehrten Lehrer Herrn Professor Dr. *P. Urban* sind wir für die stete Förderung der Arbeit sowie Herrn Professor Dr. *E. Ledinegg* für eine kritische Durchsicht des Manuskripts zu besonderem Dank verpflichtet.

#### Literatur.

- [1] *C. G. Montgomery*, Technique of Microwave Measurements. McGraw-Hill Book Comp., Inc. New York-London 1947.
- [2] *E. Ledinegg*, Ann. Physik 5, 41 (1942).
- [3] *Landolt Börnstein*, Phys. Chem. Tab.
- [4] *F. Borgnis*, Hochfrequenztechnik und Elektroak. 56, 47—54 (1940).



# Die Dichte von entarteten Gasen in Potentialfeldern.

Von

H. Robl, Wien.

Mit 2 Abbildungen.

(Eingelangt am 31. August 1950.)

Es werden zwei einfache Methoden angegeben, die zu Gleichungen führen, mit deren Hilfe die Dichte eines Gases in einem Potentialfeld berechnet werden kann, wenn die Geschwindigkeitsverteilung der Partikeln in einem kräftefreien Gebiet bekannt ist. Die Gleichungen werden auf entartete Gase angewendet, die der *Bose-Einstein-Statistik* oder *Fermi-Dirac-Statistik* gehorchen. Die Abweichungen der Dichte von nichtentarteten Gasen werden dargestellt. Die Anwendung auf extrem stark entartete Gase der *Fermi-Dirac-Statistik* zeigt, daß sich die Partikeln mit der Grenzggeschwindigkeit an jeder Stelle des Potentialfeldes auf gleichem Energieniveau befinden.

Ohne besondere Hilfsmittel der statistischen Mechanik zu verwenden soll festgestellt werden, wie die Zahl  $N$  der in der Volumeinheit enthaltenen Partikeln eines Gases von der potentiellen Energie  $U$  abhängt, welche die Partikeln in einem Potentialfeld besitzen, wenn die Geschwindigkeitsverteilung der Partikeln in einem kräftefreien Gebiet bekannt ist. Die gesuchte Funktion  $N(U)$  bezeichnen wir kurz als Dichteverteilung. Diese Funktion soll für Partikeln bestimmt werden, die der *Bose-Einstein-Statistik* oder *Fermi-Dirac-Statistik* gehorchen.

Unsere elementaren Methoden stehen in Beziehung zu zwei Ableitungen der *Maxwellschen* Geschwindigkeitsverteilung, die *Jäger*<sup>1)</sup> angegeben hat. Daß diese Ableitungen eindeutig auf die *Maxwellsche* Geschwindigkeitsverteilung führen, beruht auf der Annahme, daß die durch  $dn = Nw(c)dc$  definierte Wahrscheinlichkeit  $w(c)$  nur von der Geschwindigkeit  $c$  der Partikeln, nicht aber von der Dichte des Gases abhängt. Diese Annahme ist bei entarteten Gasen nicht gerechtfertigt.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß das Gas durch mehrere Flächen in Gebiete  $G_0, G_1, G_2, \dots$  getrennt wird, in welchen die Partikeln des Gases die potentielle Energie  $U_0, U_1, U_2, \dots$

<sup>1)</sup> *G. Jäger*, Wiener Ber. 112, 309 (1903).

besitzen. Die Temperatur des Gases soll in allen Gebieten gleich groß sein. Wir nehmen versuchsweise an, daß im Gleichgewicht die Geschwindigkeitsverteilung, abgesehen von verschiedenen Parametern  $A_0, A_1, A_2, \dots$ , die von den Teilchenzahlen pro Volumeinheit  $N_0, N_1, N_2, \dots$  abhängen, durch die gleiche Funktion bestimmt wird, die nur den Betrag der Geschwindigkeit  $c$  enthält.

In einen beliebigen Punkt  $S$  der Trennungsfläche von  $G_1$  und  $G_2$  legen wir den Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems  $x, y, z$ , dessen  $z$ -Achse in  $S$  auf der Trennungsfläche senkrecht steht und von  $G_1$  nach  $G_2$  weist. Die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten der Partikeln in  $G_1$  und  $G_2$  bezeichnen wir mit  $u_1, v_1, w_1$  und  $u_2, v_2, w_2$ . Nach unserer früheren Annahme ist dann die Zahl der Partikeln pro Volumeinheit in  $G_1$  mit Geschwindigkeitskomponenten zwischen  $u_1$  und  $u_1 + du_1$ ,  $v_1$  und  $v_1 + dv_1$ ,  $w_1$  und  $w_1 + dw_1$  sowie die Zahl der Partikeln pro Volumeinheit in  $G_2$  mit Geschwindigkeitskomponenten zwischen  $u_2$  und  $u_2 + du_2$ ,  $v_2$  und  $v_2 + dv_2$ ,  $w_2$  und  $w_2 + dw_2$  gegeben durch

$$dn_1 = f(A_1, u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) du_1 dv_1 dw_1 \quad (1)$$

und

$$dn_2 = f(A_2, u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) du_2 dv_2 dw_2. \quad (2)$$

Nach Gl. (1) treffen aus dem Gebiet  $G_1$  auf die Einheit der Trennungsfläche in  $S$  pro Zeiteinheit  $w_1 f(A_1, u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) du_1 dv_1 dw_1$  Partikeln, deren Geschwindigkeitskomponenten in den angegebenen Intervallen liegen. Da die Tangentialkomponenten der Geschwindigkeit  $u, v$  an der Trennungsfläche keine Änderung erleiden, gilt  $(m/2) w_1^2 + U_1 = (m/2) w_2^2 + U_2$  oder

$$w_1^2 + \frac{2}{m} U_1 = w_2^2 + \frac{2}{m} U_2, \quad (3)$$

wobei  $m$  die Masse einer Partikel bedeutet. Wegen  $u_1 = u_2$ ,  $v_1 = v_2$ ,  $w_1 dw_1 = w_2 dw_2$  gilt

$$\begin{aligned} w_1 f(A_1, u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) du_1 dv_1 dw_1 &= \\ = w_2 f(A_2, u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) du_2 dv_2 dw_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck bedeutet die Zahl der pro Zeiteinheit in  $S$  durch die Einheit der Trennungsfläche in das Gebiet  $G_2$  eindringenden Partikeln mit Geschwindigkeitskomponenten zwischen  $u_2$  und  $u_2 + du_2$ ,  $v_2$  und  $v_2 + dv_2$ ,  $w_2$  und  $w_2 + dw_2$ . Andererseits ist nach Gl. (2) die Zahl der Partikeln, welche pro Zeiteinheit in  $S$  durch die Einheit der Trennungsfläche in das Gebiet  $G_2$  eintreten und deren Geschwindigkeitskomponenten in den gleichen Intervallen

liegen, durch  $w_2 f(A_2, u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) du_2 dv_2 dw_2$  gegeben. Es muß also gelten

$$f(A_1, u_2^2 - v_2^2 + w_1^2) = f(A_2, u_2^2 - v_2^2 - w_2^2), \quad (5)$$

wobei  $w_1^2$  nach Gl. (3) durch  $w_2^2$  auszudrücken ist. Eine ähnliche Gleichung wird erhalten, wenn man unter Berücksichtigung, daß  $u_1 = u_2$ ,  $v_1 = v_2$ ,  $w_1 dw_1 = w_2 dw_2$ , von

$$\begin{aligned} w_2 f(A_2, u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) du_2 dv_2 dw_2 = \\ = w_1 f(A_2, u_1^2 + v_1^2 + w_2^2) du_1 dv_1 dw_1 \end{aligned} \quad (6)$$

ausgeht und beachtet, daß die Zahl der pro Zeiteinheit von  $G_1$  auf die Einheit der Trennungsfläche in  $S$  treffenden Partikeln gegeben ist durch  $w_1 f(A_1, u_1^2 + v_1^2 - w_1^2) du_1 dv_1 dw_1$ . Ebenso wie Gl. (5) muß also auch gelten

$$f(A_2, u_1^2 + v_1^2 + w_2^2) = f(A_1, u_1^2 + v_1^2 + w_1^2), \quad (7)$$

wobei  $w_2^2$  nach Gl. (3) durch  $w_1^2$  auszudrücken ist. Eliminieren wir mit Hilfe der Gl. (3) aus Gl. (5)  $w_1^2$  und aus Gl. (7)  $w_2^2$ , so erhalten wir unter Verzicht auf die jetzt überflüssigen Indizes der Geschwindigkeitskomponenten

$$f\left\{A_1, u^2 + v^2 + w^2 + \frac{2}{m}(U_2 - U_1)\right\} = f\{A_2, u^2 - v^2 - w^2\} \quad (8)$$

und

$$f\left\{A_2, u^2 + v^2 + w^2 - \frac{2}{m}(U_1 - U_2)\right\} = f\{A_1, u^2 - v^2 - w^2\}. \quad (9)$$

Da die Gl. (8) und (9) die Partikelgeschwindigkeit nur in dem symmetrischen Ausdruck  $u^2 - v^2 - w^2$  enthalten, sind sie unabhängig von der Orientierung des Koordinatensystems  $x, y, z$  und gelten daher unabhängig von der Wahl des Punktes  $S$  auf der Trennungsfläche von  $G_1$  und  $G_2$ . Nach Gl. (8) und (9) besteht ein Zusammenhang zwischen den Parametern  $A_1$  und  $A_2$ . Damit wird aber gerade die gesuchte Beziehung zwischen den Teilchenzahlen pro Volumeinheit  $N_1$  und  $N_2$  hergestellt. Die Geschwindigkeitsquadrate  $u^2 - v^2 - w^2$  müssen dabei aus den Gleichungen herausfallen.

Es sei etwa  $U_2 - U_1$ . Dann werden jene Partikeln des Gases in  $G_1$ , die mit zu kleiner Normalkomponente der Geschwindigkeit auf die Trennungsfläche treffen, zurückgeworfen. Die durchtretenden Partikeln werden jedoch, wie aus den früheren Überlegungen hervorgeht, genau durch Partikeln ersetzt, welche die Trennungsfläche in umgekehrter Richtung durchdringen. Daraus folgt, daß die Gl. (8) und (9) tatsächlich einen Gleichgewichtszustand beschreiben. Die Zahl der Partikeln, welche die Trennungsfläche durchstoßen, ist in beiden Richtungen gleich und es wird



weder Impuls noch Energie durch die Trennungsfläche transportiert. Nach Einstellung des Gleichgewichtes kann die Trennungsfläche durch eine Wand ersetzt werden, ohne daß die Verhältnisse in den Gebieten  $G_1$  und  $G_2$  eine Änderung erfahren. Die bisherigen Schlüsse können nun auf die Gebiete  $G_0$ ,  $G_1$ ,  $G_2, \dots$  übertragen werden. Die Dichten und Geschwindigkeitsverteilungen bleiben ungeändert, wenn beliebige Trennungsflächen durch Wände ersetzt werden. Die Funktionen  $f(A, u^2 + v^2 + w^2)$  sind daher mit den Geschwindigkeitsverteilungen kräftefreier Partikeln, die wir als bekannt voraussetzen, identisch.

Wir wollen die Gl. (8) und (9) noch in eine symmetrische Form bringen. Zu diesem Zweck nehmen wir an, daß das Gebiet  $G_0$  sowohl mit dem Gebiet  $G_1$  als auch mit dem Gebiet  $G_2$  gemeinsame Trennungsflächen besitzt, und wenden Gl. (8) auf die Gebiete  $G_1$  und  $G_0$ , Gl. (9) hingegen auf die Gebiete  $G_2$  und  $G_0$  an. Wir ersetzen also erstens in Gl. (8)  $U_2$  durch  $U_0$  und  $A_2$  durch  $A_0$  und zweitens in Gl. (9)  $U_1$  durch  $U_0$  und  $A_1$  durch  $A_0$ . Dann erhalten wir

$$f\left\{A_1, u^2 + v^2 + w^2 + \frac{2}{m}(U_0 - U_1)\right\} = f\{A_0, u^2 + v^2 + w^2\} \quad (10)$$

und

$$f\left\{A_2, u^2 + v^2 + w^2 + \frac{2}{m}(U_0 - U_2)\right\} = f\{A_0, u^2 + v^2 + w^2\}. \quad (11)$$

Setzen wir jetzt  $U_0 = 0$ , so liefern die Gl. (10) und (11) die symmetrische Beziehung

$$f\left(A_1, u^2 + v^2 + w^2 - \frac{2}{m}U_1\right) = f\left(A_2, u^2 + v^2 + w^2 - \frac{2}{m}U_2\right). \quad (12)$$

Die Ausdrücke auf beiden Seiten dieser Gleichung sind so zu verstehen, daß in den entsprechenden Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen von kräftefreien Partikeln die Geschwindigkeitsquadrate  $u^2 + v^2 + w^2$  durch  $u^2 + v^2 + w^2 - (2/m)U$  zu ersetzen sind. Nach Einstellung des Gleichgewichtes mit  $U_0 = 0$  im Gebiet  $G_0$  können wir auf Grund unserer früheren Überlegungen das Gebiet  $G_0$  durch eine Wand von den übrigen Gebieten  $G_1, G_2, \dots$  abschließen, ohne daß in diesen Gebieten eine Änderung der Gasdichte eintritt. Gl. (12) muß daher unabhängig von der speziellen Wahl  $U_0 = 0$  gelten. Durch Verallgemeinerung dieser Gleichung folgt, daß in zwei aneinander grenzenden Gebieten  $G_i$  und  $G_k$ , in denen die Partikeln die potentielle Energie  $U_i$  und  $U_k$  besitzen, die Parameter  $A_i$  und  $A_k$  durch die Gleichung

$$f\left(A_i, u^2 + v^2 + w^2 - \frac{2}{m}U_i\right) = f\left(A_k, u^2 + v^2 + w^2 - \frac{2}{m}U_k\right) \quad (13)$$

in Beziehung stehen. Durch schrittweise Anwendung dieser Gleichung auf je zwei durch eine Fläche getrennte Gebiete ergibt sich, daß die Gl. (12) auch zwischen zwei nicht aneinander-grenzenden Gebieten  $G_1$  und  $G_2$  und daher auch zwischen zwei beliebigen Punkten  $S_1$  und  $S_2$  eines kontinuierlichen Potentialfeldes Gültigkeit besitzt.

Unabhängig von der in Gl. (12) angegebenen Vorschrift kann die Dichteverteilung noch auf andere Weise bestimmt werden. Zwischen der auf die Volumeinheit eines Gases wirkenden Kraft  $F$  und dem Druck  $P$  besteht die Beziehung

$$\int F d\tau = \oint P d\sigma, \quad (14)$$

wobei das Raumintegral über das von der Integrationsfläche eingeschlossene Volumen zu erstrecken ist. Mit Hilfe des Integralsatzes

$$\oint P d\sigma = \int \text{grad } P d\tau \quad (15)$$

erhält man die bekannte Gleichung

$$F = \text{grad } P. \quad (16)$$

Bezeichnen wir die auf eine Partikel wirkende Kraft mit  $K$  und ist die Zahl der Partikeln pro Volumeinheit  $N$ , so gilt  $F = NK$ . Es ergibt sich daher  $K = (1/N) \text{grad } P$ . Mit  $K = -\text{grad } U$  folgt durch Integration von einem Punkt  $S_1$  zu einem Punkt  $S_2$

$$-(U_2 - U_1) = \int_{S_1}^{S_2} \frac{dP}{N}. \quad (17)$$

Berechnet man mit Hilfe der durch  $dn = f(A, c) dc$  definierten Geschwindigkeitsverteilungsfunktion  $f(A, c)$  die Teilchenzahl pro Volumeinheit

$$N = \int_0^{\infty} f(A, c) dc \quad (18)$$

und den Druck

$$P = \frac{m}{3} \int_0^{\infty} c^2 f(A, c) dc, \quad (19)$$

so muß Gl. (17) dasselbe Ergebnis liefern wie Gl. (12).

Wir wollen jetzt unsere allgemeinen Ergebnisse auf Gase anwenden, die der *Bose-Einstein-Statistik* oder *Fermi-Dirac-Statistik* gehorchen. In diesem Fall ist die mittlere Besetzungszahl einer Zelle der Größe  $h^3$  an einer Stelle des Phasenraumes,

der die kinetische Energie  $\varepsilon$  entspricht, mit einem Gewichtungsfaktor  $g$  bekanntlich durch

$$r(\varepsilon) = \frac{g}{\frac{1}{A} e^{\frac{\varepsilon}{kT}} \mp 1} \quad (20)$$

gegeben. Dabei gilt das negative Vorzeichen für die *Bose-Einstein*-Statistik, das positive Vorzeichen hingegen für die *Fermi-Dirac*-Statistik. Die Konstante  $A$  wird Entartungsparameter genannt. Die Zahl der Zellen im Volumen  $V$  und Impulsintervall  $p$  bis  $p + dp$  ist  $dZ = V(4\pi p^2 h^3) dp$ . Daraus folgt

$$dZ = V \left( \frac{m}{h} \right)^3 4\pi c^2 dc. \quad (21)$$

Für die Zahl der Partikeln pro Volumeinheit im Geschwindigkeitsintervall  $c$  bis  $c + dc$  ergibt sich daraus

$$dn = g \left( \frac{m}{h} \right)^3 \frac{4\pi c^2}{\frac{1}{A} e^{\frac{mc^2}{2kT}} \mp 1} dc \quad (22)$$

oder

$$dn = g \left( \frac{m}{h} \right)^3 \frac{1}{\frac{1}{A} e^{\frac{m}{2kT}(u^2 + v^2 + w^2)} \mp 1} du dv dw, \quad (23)$$

wenn wir die aufeinander senkrechten Geschwindigkeitskomponenten wieder mit  $u, v, w$  bezeichnen. Ersetzen wir in der vor dem Produkt  $du dv dw$  stehenden Verteilungsfunktion  $f(A, u^2 + v^2 + w^2)$  gemäß Gl. (12)  $u^2 + v^2 + w^2$  durch  $u^2 + v^2 + w^2 - (2/m)U$ , so folgt die wichtige Beziehung

$$\frac{A_2}{A_1} = e^{-\frac{U_2 - U_1}{kT}}. \quad (24)$$

Wenn  $A \ll 1$ , so gehen beide Statistiken in die klassische Statistik über. Dabei wird

$$dn = g \left( \frac{m}{h} \right)^3 A 4\pi c^2 e^{-\frac{mc^2}{2kT}} dc. \quad (25)$$

Nach Gl. (18) erhält man

$$N = Ag \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}. \quad (26)$$

Für die klassische Statistik gilt daher nach Gl. (24) die Beziehung

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{U_2 - U_1}{kT}}, \quad (27)$$

die als barometrische Höhenformel bekannt ist.



Wir wollen jetzt die Gl. (24) noch mit Hilfe der Gl. (17) ableiten. Die in Gl. (22) enthaltene Geschwindigkeitsverteilungsfunktion  $f(A, c)$  liefert, in Gl. (18) eingesetzt, für die Teilchenzahl pro Volumeinheit die Beziehung

$$N = g \left( \frac{m}{h} \right)^3 4\pi \int_0^\infty \frac{1}{A} \frac{c^2 dc}{e^{\frac{mc^2}{2kT}} - 1}. \quad (28)$$

Ebenso ergibt sich nach Gl. (19) für den Druck

$$P = \frac{m}{3} g \left( \frac{m}{h} \right)^3 4\pi \int_0^\infty \frac{c^4 dc}{\frac{1}{A} e^{\frac{mc^2}{2kT}} - 1}. \quad (29)$$

Aus dieser Gleichung erhält man für die mit einer Änderung des Entartungsparameters  $A$  verbundene Änderung des Druckes  $P$  die Beziehung

$$dP = \frac{m}{3} g \left( \frac{m}{h} \right)^3 4\pi \frac{dA}{A^2} \int_0^\infty \frac{c^4 e^{\frac{mc^2}{2kT}} dc}{\left( \frac{1}{A} e^{\frac{mc^2}{2kT}} - 1 \right)^2}. \quad (30)$$

Für diesen Ausdruck kann geschrieben werden

$$dP = -\frac{m}{3} g \left( \frac{m}{h} \right)^3 4\pi \frac{kT}{m} \frac{dA}{A} \int_0^\infty \frac{d}{dc} \left( \frac{1}{\frac{1}{A} e^{\frac{mc^2}{2kT}} - 1} \right) dc. \quad (31)$$

Eine partielle Integration liefert

$$dP = kT g \left( \frac{m}{h} \right)^3 4\pi \frac{dA}{A} \int_0^\infty \frac{c^2 dc}{\frac{1}{A} e^{\frac{mc^2}{2kT}} - 1}. \quad (32)$$

Nach Gl. (28) gilt daher  $dP N = kT dA A$ . Dieser Ausdruck führt, in Gl. (17) eingesetzt, wie zu erwarten war, wieder zu Gl. (24).

Um den in Gl. (24) auftretenden Quotienten  $A_2/A_1$  wenigstens für Entartungsparameter  $A \gg 1$  näherungsweise als Funktion der Teilchenzahlen pro Volumeinheit  $N_2$  und  $N_1$  auszudrücken, benützen wir ein von *Einstein*<sup>2)</sup> angegebenes Verfahren. Mit

$$\frac{1}{a \mp 1} = \sum_{s=1}^{\infty} (\pm 1)^{s-1} \frac{1}{a^s}, \quad (a > 1) \quad (33)$$

<sup>2)</sup> A. Einstein, Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin 3, (1925).

erhält man für die in Gl. (22) enthaltene Geschwindigkeitsverteilungsfunktion

$$f(A, c) = g \left( \frac{m}{h} \right)^3 4 \pi c^2 \sum_{s=1}^{\infty} (\pm 1)^{s-1} A^s e^{-s \frac{m c^2}{2 k T}}, \quad (34)$$

wobei das positive Vorzeichen für die *Bose-Einstein*-Statistik, das negative Vorzeichen für die *Fermi-Dirac*-Statistik gilt. Aus dieser Beziehung folgt gemäß Gl. (18) nach Vertauschung der Reihenfolge von Integration und Summation

$$N = g \frac{(2 \pi m k T)^{3/2}}{h^3} \sum_{s=1}^{\infty} (\pm 1)^{s-1} \frac{A^s}{s^{3/2}}. \quad (35)$$

Man setzt nun

$$\sum_{s=1}^{\infty} (\pm 1)^{s-1} \frac{A^s}{s^{3/2}} = x(A), \quad \sum_{s=1}^{\infty} (\pm 1)^{s-1} \frac{A^s}{s^{5/2}} = y(A) \quad (36)$$

und entwickelt

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2} y''(0)x^2 + \frac{1}{6} y'''(0)x^3 + \dots \quad (37)$$

Die Ableitungen  $y^{(n)}(0)$  bestimmt man mit Hilfe der Formel

$$\left. \frac{d^n y}{d x^n} \right|_{x=0} = \left. \frac{\frac{d}{d A} \left( \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} \right)}{\frac{d x}{d A}} \right|_{A=0} \quad (38)$$

und findet  $y(0) = 0, y'(0) = 1, (1/2) y''(0) = \mp 0,1768, (1/6) y'''(0) = -0,0034$ , so daß

$$\frac{y}{x} = 1 \mp 0,1768 x - 0,0034 x^2 + \dots \quad (39)$$

Die *Riemannsche* Zetafunktion ist durch

$$\zeta(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^z} \quad (40)$$

definiert und besitzt für  $z = 3/2$  den Wert 2,612. Außerdem besteht die Beziehung

$$\sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{1}{s^z} = \left( 1 - \frac{2}{2^z} \right) \zeta(z). \quad (41)$$

Mit  $z = 3/2$  ergibt sich daraus für die alternierende Reihe der Wert 0,7650. Bis zu jenen Werten, welche  $x(A)$  nach Gl. (36)

für  $A = 1$  annimmt, kann daher  $y/x$  von Gl. (39) mit ausreichender Genauigkeit durch die beiden ersten Glieder angegeben werden. Da der Koeffizient von  $x$  in Gl. (39) mit  $2^{-1/2}$  identisch ist, ergibt sich

$$\frac{dy}{x} = \left( \frac{1}{x} \mp \frac{1}{2^{3/2}} \right) dx. \quad (42)$$

Nun folgt aus Gl. (36)

$$dy = \frac{dA}{A} \sum_{s=1}^{\infty} (\pm 1)^{s-1} \frac{A^s}{s^{3/2}}, \quad (43)$$

so daß  $dy/x = dA/A$ . Durch Integration erhält man daher

$$\log \frac{A^2}{A_1} = \log \frac{x_2}{x_1} \mp \frac{1}{2^{3/2}} (x_2 - x_1). \quad (44)$$

Bezeichnen wir nun in Gl. (35) den speziellen Wert von  $N$  für  $A = 1$  mit  $N^*$

$$N^* = g \frac{(2\pi m k T)^{3/2}}{h^3} x(1),$$

$$x(1) = \begin{cases} 2,612 & B.-E. \\ 0,7650 & F.-D. \end{cases} \quad (45)$$

so wird  $NN^* = x(A) x(1)$

$$\log \frac{A_2}{A_1} = \log \frac{N_2}{N_1} \mp \frac{x(1)}{2^{3/2}} \frac{N_1}{N^*} \left( 1 - \frac{N_2}{N_1} \right) \quad (46)$$

oder

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{N_2}{N_1} e^{\pm K \frac{N_1}{N_1^*} \left( 1 - \frac{N_2}{N_1} \right)}, \quad (47)$$

wobei für die *Bose-Einstein*-Statistik das positive Vorzeichen und  $K = 0,923_5$ , für die *Fermi-Dirac*-Statistik das negative Vorzeichen und  $K = 0,270_5$  gilt. Gl. (47) ist brauchbar für  $N_1 \gg N_1^*$  und  $N_2 \gg N_1$ . Durch Einsetzen des Quotienten  $A_2/A_1$  in Gl. (24) erhält man einen Zusammenhang zwischen der Teilchenzahl pro Volumeinheit  $N$  und der potentiellen Energie  $U$ . Für  $N_1 \gg N_2 \gg N_1^*$  setzt man  $N_2 = N_1 - \Delta N$ ,  $U_2 = U_1 + \Delta U$  und erhält nach Gl. (46) und (24) näherungsweise

$$\frac{\Delta U}{kT} = \frac{\Delta N}{N_1} \left( 1 \mp K \frac{N_1}{N_1^*} \right), \quad (48)$$

wobei, wie in allen Gleichungen, das obere Vorzeichen für die *Bose-Einstein*-Statistik mit  $K = 0,923_5$ , das untere Vorzeichen

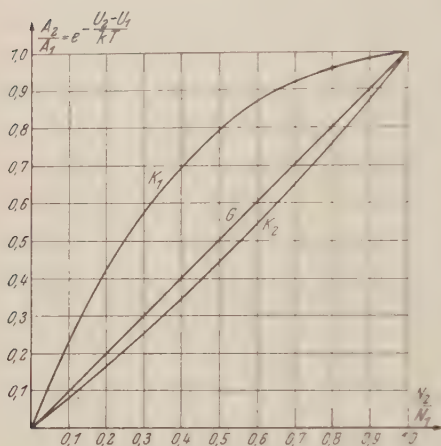


Abb. 1. Der Quotient  $A_2/A_1 = \exp -(U_2 - U_1)/kT$  als Funktion von  $N_2/N_1$ . Die Kurven  $K_1$  und  $K_2$  gelten für die *Bose-Einstein*-Statistik und *Fermi-Dirac*-Statistik bei  $N_1/N_1^* = 1$ . Die Gerade  $G$  entspricht verschwindender Entartung  $N_1/N_1^* \ll 1$ .



für die *Fermi-Dirac*-Statistik mit  $K = 0,270_5$  gilt. Der in Gl. (47) angegebene Quotient  $A_2/A_1 = \exp -(U_2 - U_1)/kT$  ist in Abb. 1 als Funktion von  $N_2/N_1$  dargestellt. Die Kurven  $K_1$  und  $K_2$  gelten für die *Bose-Einstein*-Statistik und *Fermi-Dirac*-Statistik bei  $N_1/N_1^* = 1$ . Die Gerade  $G$  entspricht verschwindender Entartung  $N_1/N_1^* \ll 1$ .

Zur Bestimmung der Dichteverteilung realer Gase verwendet man die von *Kamerlingh Onnes* angegebene Form der Zustandsgleichung

$$PV = RT \left\{ 1 + \frac{B(T)}{V} + \dots \right\}. \quad (49)$$

Nun setzt sich, wie *Bethe* und *Uhlenbeck*<sup>3)</sup> gezeigt haben, der zweite Virialkoeffizient  $B(T)$  von realen Gasen additiv aus zwei Bestandteilen zusammen, von denen der erste der Gasentartung entspricht, während der zweite die zwischenmolekularen Kräfte berücksichtigt. Aus  $N = L/V$  und  $R = Lk$  mit der *Loschmidt*-schen Zahl  $L$  folgt

$$P = kT \left\{ N + \frac{B(T)}{L} N^2 + \dots \right\} \quad (50)$$

und

$$\frac{dP}{N} = kT \left\{ \frac{1}{N} + 2 \frac{B(T)}{L} + \dots \right\} dN. \quad (51)$$

Da, wie wir im Anschluß an Gl. (32) gezeigt haben,  $dP/N = kT dA/A$ , liefert die Integration

$$\log \frac{A_2}{A_1} = \log \frac{N_2}{N_1} - 2 B(T) \frac{N_1}{L} \left( 1 - \frac{N_2}{N_1} \right) \quad (52)$$

oder

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{N_2}{N_1} e^{-2 B(T) \frac{N_1}{L} \left( 1 - \frac{N_2}{N_1} \right)}. \quad (53)$$

Durch diese Beziehung wird nach Gl. (24) die Dichteverteilung realer Gase bestimmt.

Bei extrem starker Entartung des *Fermi-Dirac*-Gases, d. h. für  $A \gg 1$ , setzt man zweckmäßig

$$\frac{1}{A} = e^{-\frac{m}{2kT} c^{*2}}. \quad (54)$$

Die Verteilungsfunktion kann dann näherungsweise durch

$$f(A, c) = g \left( \frac{m}{h} \right)^3 4\pi \begin{cases} c^2 & c < c^* \\ 0 & c > c^* \end{cases} \quad (55)$$

beschrieben werden. Nach Gl. (18) ergibt sich

3) E. Bethe u. G. E. Uhlenbeck, *Physica* 4, 915 (1937).

$$N = g \left( \frac{m}{h} \right)^3 \frac{4\pi}{3} c^{*3} \quad (56)$$

oder

$$c^{*2} = \left( \frac{3N}{4\pi g} \right)^{2/3} \left( \frac{h}{m} \right)^2. \quad (57)$$

Gl. (24) liefert

$$\log A_2 + \frac{U_2}{kT} = \log A_1 + \frac{U_1}{kT}. \quad (58)$$

Nach Gl. (54) ist

$$\log A = \frac{m}{2kT} c^{*2}. \quad (59)$$

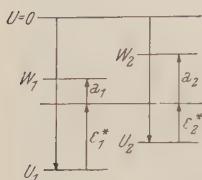


Abb. 2. Kontaktpotentiale: Es wird angenommen, daß die potentielle Energie eines Elektrons in unendlicher Entfernung von zwei sich berührenden Metallen verschwindet. Im Innern der Metalle habe die potentielle Energie die Werte  $U_1$  und  $U_2$ . Die Elektronen mit der Grenzenergie  $\varepsilon_1^*$  und  $\varepsilon_2^*$  befinden sich dann auf gleichem Energieniveau.

Schreibt man für die Grenzenergie  $(m/2)c^{*2} = \varepsilon^*$ , so folgt die einfache Beziehung

$$\varepsilon_2^* + U_2 = \varepsilon_1^* + U_1. \quad (60)$$

Nehmen wir an, daß  $U_2 > U_1$ , dann wird  $\varepsilon_2^* = \varepsilon_1^* - (U_2 - U_1)$ , d. h. die Grenzenergie ist im Gebiet  $G_2$  um die Differenz der potentiellen Energie  $U_2 - U_1$  gegenüber der Grenzenergie im Gebiet  $G_1$  vermindert. Die durch Gl. (60) geforderte Beziehung, die z. B. bei der Berührung von zwei verschiedenen Metallen in Kraft tritt, ist in Abb. 2 veranschaulicht. Bezeichnen wir jene Arbeit, die erforderlich ist, um ein Elektron mit der Grenzenergie  $\varepsilon_1^*$ , bzw.  $\varepsilon_2^*$  aus den Metallen dicht über die Oberfläche zu bringen, mit  $a_1$ , bzw.  $a_2$ , so gibt  $W_1 = U_1 + \varepsilon_1^* + a_1$  und  $W_2 = U_2 + \varepsilon_2^* + a_2$  die potentielle Energie eines Elektrons über den Oberflächen an. Die Differenz  $W_2 - W_1$  oder  $a_2 - a_1$ , dividiert durch die negative Elementarladung, ist daher gleich der Potentialdifferenz  $V_2 - V_1$  dicht

über den Oberflächen der beiden Metalle. Daß sich bei der Berührung zweier Metalle die Grenzelektronen auf gleichem Energieniveau befinden, ist auf andere Weise von Eckart<sup>4)</sup> und Frenkel<sup>5)</sup> begründet worden. Setzt man in Gl. (58) die Werte von Gl. (59) und (57) ein, so erhält man bei Verwendung der Abkürzung

$$\frac{2m}{h^2} \left( \frac{4\pi g}{3} \right)^{2/3} = C \quad (61)$$

die Beziehung

$$N_2^{2/3} + CU_2 = N_1^{2/3} + CU_1. \quad (62)$$

<sup>4)</sup> C. Eckart, Z. Physik 47, 38 (1928).

<sup>5)</sup> J. Frenkel, Z. Physik 49, 31 (1928).

Gl. (62) liefert sofort die Dichteverteilung im Atommodell von *Thomas*<sup>6)</sup> und *Fermi*<sup>7)</sup>. Berücksichtigt man nämlich, daß in unendlicher Entfernung vom Atomkern die Elektronendichte und die potentielle Energie des einzelnen Elektrons verschwinden, so folgt  $N^{2/3} = -CU$ . Da für Elektronen  $g = 2$ , so erhält man nach Gl. (61)

$$N = \frac{(-2mU)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3}. \quad (63)$$

Nach Einführung dieses Ausdruckes in die Potentialgleichung  $(1/e)\Delta U = -4\pi Ne$  gelangt man unter Voraussetzung von Kugelsymmetrie zu einer Lösung  $U = U(r)$ , die nach Gl. (63) die Dichteverteilung  $N = N(r)$  bestimmt.

<sup>6)</sup> *L. H. Thomas*, Proc. Camb. Phil. Soc. **23**, 542 (1927).

<sup>7)</sup> *E. Fermi*, Z. Physik **48**, 73 (1928).



# Über die experimentelle Bestimmung von linearen Vierpolen im cm-Wellen-Gebiet.

Von

**Helmut Oppitz.**

Institut für Theoretische Physik der Universität Graz.

Mit 14 Abbildungen.

(Eingelangt am 6. Oktober 1950.)

## Zusammenfassung.

Nach einem Hinweis auf die Bedeutung von Vierpolen als Schaltelemente der cm-Wellen-Technik wird ein Transformationssatz für lineare, umkehrbare und verlustfreie Vierpole von A. Weißfloch erläutert und mit Hilfe der Vierpolmatrizen ein Beweis für ihn angegeben. Mit einem aus diesem Transformationssatz abgeleiteten Meßverfahren, das die experimentelle Aufnahme der sogenannten Transformationskurve des Vierpols und ihre Auswertung umfaßt, werden die Transformationseigenschaften von verlustfreien Vierpolen leicht bestimmbar. Dieses Meßverfahren setzt jedoch die Verwendung eines Abschlußkolbens voraus, der einen vollkommenen Kurzschluß hervorruft. Die sich anschließende Untersuchung klärt den Einfluß von verlustbehafteten Abschlußkolben auf die Genauigkeit der Bestimmung der Vierpolkenngößen des zu messenden Vierpols. Dabei zeigt sich, daß aus der Gestalt der gestörten Transformationskurve sowohl der richtige Wert der Transformationszahl als auch der dem Scheinwiderstand des verlustbehafteten Abschlußkolbens zugeordnete, kleinste Ohmsche Widerstand auf einfache Weise ermittelt werden können. Die Beschreibung einiger Methoden zur Ermittlung des tatsächlichen Scheinwiderstandes des Abschlußkolbens und der richtigen Werte der Vierpolkenngößen schließt sich an. Zum Schluß wird über das Ergebnis einer Scheinwiderstandsmessung nach der üblichen und nach der im vorhergehenden abgeleiteten Methode berichtet und die meßtechnische Eignung dieser Methode kurz diskutiert.

## Verwendete Bezeichnungen:

$\lambda$  = Wellenlänge.

$$\frac{2\pi}{\lambda} = k = \text{Kreiswellenzahl} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \omega.$$

$\omega$  = Kreisfrequenz.

$Z$  = Wellenwiderstand der homogenen Leitung [ $\Omega$ ].

$\mathfrak{X} = V + jW$  = Scheinwiderstand.

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{X}}{Z} = v + jw = \text{Reduzierter Scheinwiderstand } [\Omega].$$

$p$  = Transformationszahl eines verlustfreien Vierpols.

$x$  = Laufende Koordinate auf der Abschlußleitung.

$y$  = Laufende Koordinate auf der Meßleitung.

## 1. Einleitung.

Im Bereich der cm-Wellen stößt die Meßtechnik auf erhebliche Schwierigkeiten, wenn sie versucht, die diesem Bereich eigenen Schaltungen in der für längere Wellen üblichen Art in Einzelbestandteile, wie Induktivitäten, Kapazitäten, *Ohmsche* Widerstände, aufzulösen und die Funktion der gesamten Schaltung aus Messungen dieser Einzelteile und Berechnung ihrer Verknüpfungen untereinander mit Hilfe des *Ohmschen* und der *Kirchhoffschen* Gesetze zu erklären. Die quasistationäre Betrachtungsweise versagt hier größtenteils und die strenge oder auch nur angenäherte Berechnung der Schaltungen mit Hilfe der *Maxwellschen* Gleichungen läßt sich nur für die einfachsten geometrischen Berandungsformen durchführen. Diesem empfindlichen Mangel an geeignet bestimmbar Schaltelementen in der cm-Wellen-Technik hilft die Einführung des Vierpolbegriffes ab. In jeder noch so komplizierten cm-Wellen-Schaltung lassen sich stets Stellen finden, bzw. durch geeignete konstruktive Maßnahmen schaffen, an denen der elektromagnetische Zustand durch Angabe von Strom und Spannung oder zweier anderer, gleichwertiger Begriffe (z. B. Scheinwiderstand und Wirkleistung) eindeutig charakterisiert ist. Das zwischen zwei solchen Stellen liegende Schaltungsgebilde läßt sich dann als Vierpol auffassen, dessen Eigenschaften durch Messungen an den oben bezeichneten Stellen eindeutig bestimmbar sind. Die aus solchen Messungen erhaltenen Vierpolkenngrößen beschreiben das Transformationsverhalten des Vierpols bei konstanter Frequenz vollständig. Jede Schaltung läßt sich so in eine Reihe von — im allgemeinen hintereinandergeschalteten — Vierpolen aufteilen, deren jeder für sich der Messung zugänglich ist und deren Zusammenschaltung nach den Gesetzen der Vierpoltheorie berechnet werden kann.

Viele der in den Schaltungen auftretenden Vierpole sind linear, d. h. sie enthalten keine Elektronenröhren oder andere Elemente mit Nichtlinearität oder Richtwirkung, erfüllen die Voraussetzungen des Umkehrsatzes von vornherein, da sie an homogene Leitungen oder Hohlrohre, die nur in einem bestimmten Wellentyp schwingen, anschließen, und weisen häufig nur vernachlässigbar kleine Verluste auf. Solche lineare, umkehrbare und verlustfreie Vierpole seien im folgenden stets gemeint. Sie sind stets durch drei Kenngrößen eindeutig bestimmt<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> R. Feldtkeller, Einführung in die Vierpoltheorie. 3. Aufl. 1943. Verlag Hirzel, Leipzig.

## 2. Der Transformationssatz von Weißfloch.

Für diese Vierpole hat A. Weißfloch einen Transformationssatz angegeben, dessen Anwendung in der Meßtechnik eine einfache Methode zur Bestimmung der Kenngrößen solcher Vierpole liefert<sup>2)</sup>. Dieser Satz besagt: „Jeder verlustfreie, lineare Vierpol, der dem Umkehrsatz genügt und eingangs und ausgangs an homogene Leitungen anschließt, läßt sich durch Hinzunahme geeigneter Längen dieser Leitungen stets zu einem Vierpol ergänzen, der die Eigenschaften eines gewöhnlichen, streuungsfreien Transformators mit dem Übersetzungsverhältnis  $\tilde{u} = |p|$  hat. Jeder am Ausgang dieses Transformators angeschlossene

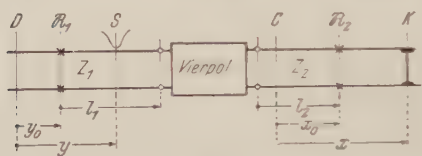


Abb. 1. Schema der Meßanordnung zur Messung der Kenngrößen von verlustfreien Vierpolen.

Scheinwiderstand  $R_2$  erscheint am Eingang als Scheinwiderstand  $R_1 = p R_2$ . Jeder am Eingang des Transformators angeschlossene Scheinwiderstand  $R_2$  erscheint am Ausgang mit dem Wert  $R_1 = \frac{1}{p} R_2$ .

wenn man die Schaltung umkehrt.“ Dieser ideale Transformator ist also durch die drei Kenngrößen

Transformationszahl  $p$   
 hinzugefügtes Leitungsstück  $l_1$   
 hinzugefügtes Leitungsstück  $l_2$

eindeutig bestimmt und besitzt die Transformationsgleichung:

$$R_1 = p R_2. \quad (1)$$

Der Beweis dieses Transformationssatzes ist im Anhang auf einem anderen Weg als jenem, der in <sup>2)</sup> eingeschlagen wurde, mit Hilfe der Vierpolmatrizen erbracht.

## 3. Messung der Vierpolkenngrößen.

Die Kenngrößen des zu einem verlustfreien Vierpol gehörigen Transformators lassen sich besonders leicht messen. Man bedient sich dazu nach <sup>2)</sup> der prinzipiellen Meßanordnung gemäß Abb. 1. Die homogenen Leitungen am Anfang und Ende des Vierpols müssen mindestens so lang sein, daß dort, wo die Spannungsmessung erfolgt, bzw. der Abschlußwiderstand angeschlossen ist, das elektromagnetische Feld dem der homogenen Leitung allein entspricht und etwaige Störfelder bereits abgeklungen

<sup>2)</sup> A. Weißfloch, Ein Transformationssatz über verlustlose Vierpole und seine Anwendung auf die experimentelle Untersuchung von dm- und cm-Wellen-Schaltungen. Hochfrequenztechnik und Elektroak. 60, 67 (1942).



sind. Durch den Kurzschlußkolben, der einen vollkommenen Kurzschluß der Abschlußleitung bewirken muß, kann, auf die beliebige Stelle  $C$  der Abschlußleitung bezogen, jeder beliebige Blindwiderstand  $jZ_2 \operatorname{tg} kx$  an den Vierpol angeschlossen werden, wie aus den bekannten Leitungsgleichungen für homogene, verlustlose Leitungen für den Abschlußwiderstand Null folgt. (Zur Klärung der Vorzeichenfrage sei festgesetzt: Die laufende Koordinate wird für die Richtung vom Sender zum Verbraucher hin positiv gezählt und der Nullpunkt der Zählung befindet sich jeweils an der Stelle des als bekannt betrachteten Widerstandes<sup>3)</sup>.)

Da der Vierpol verlustlos ist, muß an einer bestimmten Stelle der Eingangsleitung ein Spannungsminimum mit der Spannung Null auftreten. Hat dieses von einer beliebigen Stelle  $D$  der Eingangsleitung den Abstand  $y$ , so bedeutet das, daß, auf die Stelle  $D$  bezogen, am Vierpoleingang der Blindwiderstand  $jZ_1 \operatorname{tg} ky$  auftritt. Nach dem *Weißflochschen* Transformationsatz läßt sich der Vierpol durch Hinzunahme der Längen  $l_2$  und  $l_1$  oder, was dasselbe ist, der Länge  $x_0$ , von  $C$  aus gerechnet, und der Länge  $y_0$ , von  $D$  aus gerechnet, zu einem idealen Transformator umgestalten, der die Transformationszahl  $p$  besitzt und für den gilt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_1 &= p \mathfrak{R}_2 \\ \mathfrak{R}_1 &= jZ_1 \operatorname{tg} k(y - y_0) \\ \mathfrak{R}_2 &= jZ_2 \operatorname{tg} k(x - x_0)\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$jZ_1 \operatorname{tg} k(y - y_0) = j p Z_2 \operatorname{tg} k(x - x_0)$$

und weiter

$$\operatorname{tg} k(y - y_0) = m \operatorname{tg} k(x - x_0) \quad (2)$$

mit

$$m = p \frac{Z_2}{Z_1}. \quad (3)$$

Gl. (2) ist die Gleichung der sogenannten Transformationskurve. Ihre graphische Darstellung zeigt Abb. 2. Die Steigung dieser Kurve ist:

$$y' = m \cdot \frac{\cos^2 k(y - y_0)}{\cos^2 k(x - x_0)}$$

Für  $x = x_0$  und  $y = y_0$  ergibt sich

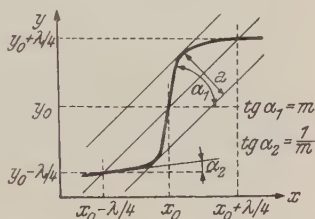


Abb. 2. Transformationskurve eines verlustfreien Vierpols bei vollkommenem Kurzschluß des Abschlußkolbens  $K$ .

<sup>3)</sup> O. Schmidt, Das Paralleldrahtsystem als Meßinstrument in der Kurzwellentechnik. Hochfrequenztechnik und Elektroak. 41, 2 (1933).

$$y' \left[ \begin{matrix} x = x_0 \\ y = y_0 \end{matrix} \right] = m. \quad (4)$$

Diese Beziehung dient wegen (3) zur Bestimmung der Vierpolkenngröße  $p$ . Die Punkte  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  sind die Schnittpunkte der Kurve (2) mit der Geraden  $y - y_0 = x - x_0$ . Damit sind die Kenngrößen  $x_0$  und  $y_0$  bestimmbar. Für  $x = x_0 \pm \frac{\lambda}{4}$ ;  $y = y_0 \pm \frac{\lambda}{4}$  ergeben sich ebenfalls Schnittpunkte der Kurve (2) mit der Geraden  $y - y_0 = x - x_0$ . Die Steigung  $m_s$  der Kurve (2) in diesen Punkten ist  $\frac{1}{m}$ . Die Größen  $x_0 \pm \frac{\lambda}{4}$ ;  $y_0 \pm \frac{\lambda}{4}$ ;  $p_s$  sind die Kenngrößen eines zweiten idealen Transformators, zu dem der untersuchte Vierpol ergänzt werden kann. Die Transformationszahl  $p_s$  ist hierbei  $p_s = \frac{1}{p} \frac{Z_1^2}{Z_2^2}$ . Die Gerade  $y - y_0 = x - x_0$  liegt außerdem im Abstand  $\frac{a}{2}$  zwischen jenen zu ihr parallelen Geraden, welche die Kurve (2) in den Punkten berühren, die bei der Drehung der Kurve um  $-45^\circ$  als Maxima und Minima der gedrehten Kurve erscheinen.

Zur Bestimmung von  $p$ ,  $l_2$ ,  $l_1$  oder, damit gleichbedeutend, von  $p$ ,  $x_0$ ,  $y_0$  braucht man daher lediglich die Abhängigkeit des Ortes  $y$  des Spannungsminimums am Vierpoleingang von der Stellung  $x$  des Abschlußkolbens am Ausgang des Vierpols bei konstanter Frequenz experimentell zu ermitteln. Trägt man die so ermittelten Meßpunkte in ein kartesisches  $x$ ,  $y$ -Koordinatensystem ein, so erhält man Punkte der Transformationskurve (2), aus der sich  $p$ ,  $x_0$ ,  $y_0$  in angegebener Weise gewinnen lassen. Eine nach dieser Methode arbeitende Meßapparatur für den Wellenlängenbereich um 14 cm zeigt Abb. 3.

#### 4. Der Einfluß des Widerstandes eines verlustbehafteten Abschlußkolbens auf die Form der Transformationskurve.

Anläßlich von Vierpolmessungen mit der in Abb. 3 gezeigten Meßeinrichtung tauchte die Frage auf, welchen Einfluß auf die Genauigkeit der Bestimmung der Vierpolkenngrößen der Umstand hat, daß der Kurzschlußkolben der Abschlußleitung im allgemeinen nicht einen idealen Kurzschluß, sondern einen komplexen oder rein Ohmschen Widerstand darstellt, der sich allerdings bei sehr sorgfältiger Konstruktion des Abschlußkolbens nur wenig vom Widerstand Null (Kurzschluß) unterscheidet. Ist dieser Einfluß bekannt, so läßt sich die Güte von Kurzschlußkolben überprüfen und mit verlustbehafteten Abschlußkolben durchgeführte Messungen können korrigiert werden. Gleichzeitig wäre

damit eine neue Methode der Scheinwiderstandsmessung möglich, die gewisse meßtechnische Vorteile gegenüber den bisher bekannten Verfahren für das cm-Wellen-Gebiet verspricht.

Zunächst ist festzustellen, daß die Gültigkeit des *Weißflochschen* Transformationsatzes durch die Verwendung eines komplexen Abschlußwiderstandes nicht betroffen wird, da dieser Satz für alle beliebigen Abschlußwiderstände gilt, weil bei seiner Herleitung keinerlei Einschränkungen bezüglich der Art des Abschlußwiderstandes getroffen wurden. Wohl aber wird die zur Ermittlung der Vierpolkenngößen verwendete Transformationskurve sich ändern, da diese sich nur unter der Voraussetzung eines vollkommenen Kurzschlusses durch Gl. (2) beschreiben läßt. Die folgende Untersuchung soll nun zeigen, welche Veränderungen die Gestalt der Transformationskurve bei Verwendung eines verlustbehafteten Abschlußkolbens erfährt und wie es möglich ist, aus dieser gestörten Transformationskurve die richtigen Vierpolkenngößen und zugleich die Größe des Abschlußwiderstandes zu ermitteln.

Es genügt, zunächst den Fall zu betrachten, in dem der Widerstand des Abschlußkolbens rein ohmisch ist, d. h. nur einen Realteil besitzt. Auf diesen Fall läßt sich auch derjenige eines komplexen Abschlußwiderstandes stets zurückführen, da in der Theorie der homogenen, verlustfreien Leitung gezeigt wird, daß zu jedem komplexen Abschlußwiderstand einer homogenen, verlustfreien Leitung stets zwei reelle Widerstände gehören, die in bestimmten Entfernungen vom Ort des komplexen Abschlußwiderstandes auf der Leitung auftreten, und sich bei Verschiebung des Abschlußwiderstandes mit diesem verschieben, ohne dabei den Abstand von diesem zu ändern. Diese rein



Abb. 3. Gesamtansicht der Meßeinrichtung.

$R$  = Sender: Pintsch-Resotankröhre ( $\lambda \approx 14$  cm) mit Abstimmvorrichtungen.

$M$  = Koaxiale Leitung mit Schlitz für Abtastsonde (Meßleitung).

$S$  = Schlitten mit Sonde und Detektor  $D_M$ .

$St_D$  = Stichleitung zur Abstimmung des Detektors  $D_M$ .

$U$  = Meßuhr zur genauen Messung der Lage des Spannungsknotens.

$G_M$  = Lichtmarkengalvanometer zur Anzeige des Spannungsminimums auf der Meßleitung.

$MV$  = Meßleitungsvierpol (an dieser Stelle wurde die in Kap. 5 erwähnte Stichleitung eingeschaltet).

$A$  = Abschlußleitung.

$K$  = Beweglicher Kurzschlußkolben von  $A$ .

$W$  = Resonanzwellenmesser.

$D_W$  = Detektor von  $W$ .

$G_W$  = Lichtmarkengalvanometer zur Anzeige der Resonanzeinstellung von  $W$ .

$N$  = Stabilisierte Netzanschlußgeräte für  $R$ .



*Ohmschen Widerstände* sind dabei die Extremwerte der Absolutbeträge aller jener Scheinwiderstände  $\mathcal{R}$ , die bei Abschluß der Leitung mit einem bestimmten komplexen Widerstand auf ihr auftreten können. Sie werden daher mit  $R_{\min}$  und  $R_{\max}$ , je nach ihrer Größe, bezeichnet. Die Orte ihres Auftretens auf der

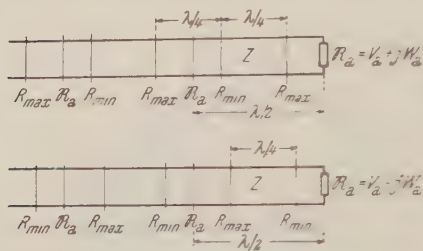


Abb. 4. Lage der Widerstände  $R_{\max}$  und  $R_{\min}$  bei Abschluß der homogenen Leitung mit einem komplexen Widerstand  $\mathcal{R}_a$ .

Leitung fallen übrigens mit den Orten zusammen, an denen die Extremwerte des Spannungsquadrates  $\mathcal{U}\mathcal{U}^*$  auftreten, das bei der Feststellung der Spannungsverteilung auf der Leitung mittels Sonde und Detektor gemessen wird, wenn dessen Kennlinie durch eine Parabel zweiten Grades dargestellt werden kann, was meist sehr angenähert zutrifft. (Quadratisches Arbeiten des Detektors.) Abb. 4 zeigt

die Lage der auf der Abschlußleitung auftretenden Widerstände  $R_{\max}$  und  $R_{\min}$  für  $\mathcal{R}_a = V - jW$  und  $\mathcal{R}_a = V + jW$ .

Es stellt daher keine Einschränkung der Allgemeinheit der Überlegungen dar, wenn man den im allgemeinen komplexen Widerstand eines verlustbehafteten Kurzschlußkolbens durch den ihm zugeordneten Widerstand  $R_{\min}^{(0)}$  ersetzt und diesen als Abschlußwiderstand betrachtet.

Da es sich im vorliegenden Fall um die Transformation eines Widerstandes durch einen verlustfreien Vierpol handelt, gilt der *Weißflochsche* Transformationssatz. Das Spannungsminimum auf der Meßleitung hat jedoch nicht mehr den Wert Null. Es fällt mit dem Ort des transformierten Widerstandes  $R_{\min} = p R_{\min}^{(0)}$  zusammen. (Siehe Abb. 5.) Die Berechnung dieser Transformation unter Berücksichtigung des *Weißflochschen* Transformationssatzes liefert, wie im Anhang näher ausgeführt ist, die Gleichung der Transformationskurve für einen rein *Ohmschen* Abschlußwiderstand  $V_0$  zu:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2 k \bar{y} &= \frac{m[2(1-v_0^4) \sin 2 k x + (1-v_0^2)^2 \sin 4 k x]}{(1+v_0^2)^2 + 2(1-v_0^4) \cos 2 k x + \frac{1}{2}(1-v_0^2)^2[1-m^2 + (1+m^2) \cos 4 k x] - 4 m^2} \end{aligned} \quad (5)$$

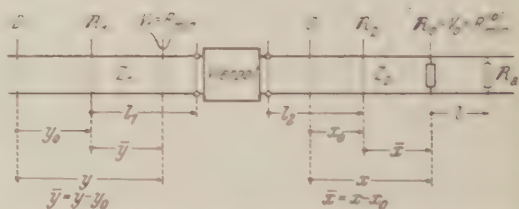


Abb. 5. Schema der Meßanordnung zur Messung der Kenngrößen eines verlustfreien Vierpols bei verlustbehaftetem Abschlußkolben.

mit

$$m = p \frac{Z_2}{Z_1} \text{ gemäß (3)}$$

und

$$\bar{y} = y - y_0, \quad \bar{x} = x - x_0. \quad (5a)$$

Für  $v_0 = 0$  geht Gl. (5) in Gl. (2) über, sie wird also zur Weißflochschen Transformationskurve. Für  $2k\bar{x} = n\pi$  wird

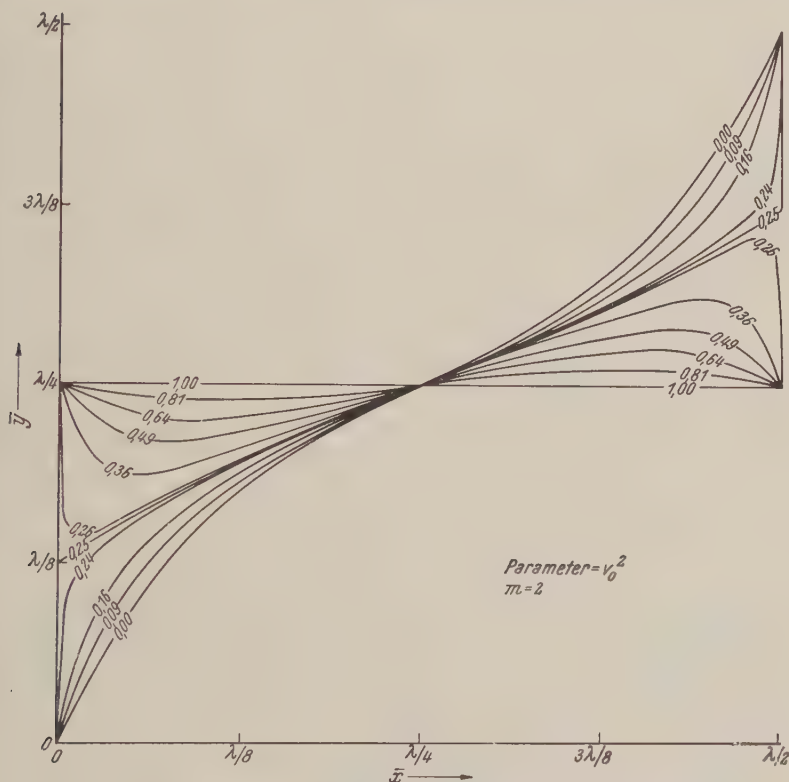


Abb. 6. Transformationskurven bei Ohmschen Abschlußwiderständen  $V_0$ .

tg  $2k\bar{y} = 0$ . Daher gilt auch für Gl. (5) ebenso wie für Gl. (2):  $2k\bar{y} = n\pi = 2k\bar{x}$ . Die durch (5) dargestellte Kurve besitzt also die gleichen Schnittpunkte mit der Geraden  $y = \bar{x}$  wie die Kurve nach (2). Die Form der Kurve jedoch ändert sich mit wachsenden Werten von  $v_0$  ganz beträchtlich, wie Abb. 6 für  $m=2$  und verschiedene Werte von  $v_0$  zeigt.

Ist also der Kurzschlußkolben verlustbehaftet, so erhält man bis zu einem bestimmten Betrag von  $v_0 - v_{0g}$  zu große Werte für  $m$ . Für größere Beträge von  $v_0$  windet sich die

Kurve (5) nicht mehr um eine gegen die  $x$ -Achse unter  $45^\circ$  geneigte, sondern um eine zu ihr parallele Gerade. Die Ermittlung von  $m$  auf die übliche Weise nach Gl. (4) ist dann nicht mehr sinnvoll. Der Wert der beiden anderen Kenngrößen  $x_0$  und  $y_0$  wird jedoch nicht verfälscht, da selbst bei Werten von  $v_0 > v_{0g}$  der Punkt  $x_0 = \frac{\lambda}{4}$ ,  $y_0 = \frac{\lambda}{4}$  erhalten bleibt, aus dessen Lage unschwer auf die Lage von  $x_0$  und  $y_0$  geschlossen werden kann.

Da sich für  $v_0 > 0$  die Steigungen in den Schnittpunkten mit der Geraden  $\bar{y} - \bar{x}$  gegenüber den Steigungen  $m$  und  $\frac{1}{m}$  für  $v_0 = 0$  ändern, liegt der Gedanke nahe, aus diesen geänderten Steigungen Schlüsse auf die Größe von  $v_0$  und den richtigen Wert von  $m$  zu ziehen. Die im Anhang ausgeführte Rechnung zeigt, daß sich sowohl  $v_0$  als auch  $m$  in einfacher Weise von den Steigungen  $m_1$  und  $m_2$  der Kurve (5) in den Schnittpunkten mit der Geraden  $\bar{y} - \bar{x}$ , bzw. der Geraden  $y = \text{const.} = \frac{\lambda}{4}$ , d. h. für  $\bar{x} = 0$  und  $\bar{x} = -\frac{\lambda}{4}$  ableiten lassen. Die dem Absolutbetrage nach größere Steigung ist mit  $m_1$ , die kleinere mit  $m_2$  bezeichnet. Dann gilt:

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2 m_1 m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_1 + m_2}{2 m_1 m_2}\right)^2 - 1} \quad (6)$$

$$v_0^2 = \frac{m_1 - m}{m(m_1 m - 1)} \quad \text{oder} \quad v_0^2 = \frac{m(m_2 m - 1)}{m_2 - m} \quad (7)$$

Der Wert von  $v_0 = v_{0g}$ , bei dem für einen bestimmten Wert von  $m$  die sich um die Gerade  $y = x$  windenden Kurven in jene übergehen, die sich um  $\bar{y} = \pm \frac{\lambda}{4}$  winden, ist gegeben durch

$$v_{0g} = \frac{1}{m}, \quad (7a)$$

da  $m_1$  dann den Wert  $\infty$  aufweist. Der dazugehörige Wert von  $m_2$  beträgt

$$m_2 = \frac{m}{1 + m^2}. \quad (7b)$$

Besitzt der Abschlußkolben einen komplexen Widerstand, so tritt der zu ihm gehörende reelle Widerstand  $R_{\min}^{(0)}$  in einem bestimmten Abstand  $l$  vor dem Abschlußkolben auf. Dieser Wert  $R_{\min}^{(0)}$  wird bei der Ermittlung des Widerstandes des Abschlußkolbens aus den Steigungen  $m_1$  und  $m_2$  der Trans-



formationskurve (5) gefunden, da sich die experimentelle Ermittlung von Punkten der Kurve (5) auf die Messung der Lage des auf der Meßleitung auftretenden Spannungsminimums gründet und zur Berechnung von  $R_{\min}^{(0)} = V_0$  derjenige Wert von  $m$  aus Gl. (6) verwendet wird, der größer als 1 ist. Ist also der Abschlußkolben nicht mit einem rein Ohmschen Widerstand, sondern mit einem komplexen Widerstand  $\mathfrak{R}_a$  behaftet, so wird sich die Transformationskurve, die für diesen Widerstand erhalten wird, gegenüber der Transformationskurve, die man für den zu  $\mathfrak{R}_a$  gehörenden reellen Widerstand  $R_{\min}^{(0)}$  erhält, in der  $x$ -Richtung um den Betrag  $l$  des Abstandes von  $\mathfrak{R}_a$  und  $R_{\min}^{(0)}$  verschieben. Die Folge davon ist, daß der Ort  $x_0$  und damit der Wert der Kenngröße  $l_2$  des Vierpols um den Betrag  $l$  falsch bestimmt wird. (Siehe Abb. 5.) Aus den am Vierpoleingang meßbaren Größen, d. h. der Lage des Spannungsminimums und

dem Wert  $d$  des Spannungsverhältnisses  $\left( d = \sqrt{\frac{\mathfrak{U} \mathfrak{U}_{\min}^*}{\mathfrak{U} \mathfrak{U}_{\max}^*}} \right)$  oder der Knotenbreite  $a$  (falls man die Messung der beiden letzteren zulassen will), läßt sich kein Rückschluß auf die Größe von  $l$  ziehen, da diese, wegen des willkürlich gewählten Ortes  $C$  für den Ausgangspunkt der Zählung der  $x$ -Koordinate, nicht ermittelt werden kann. Würde man jedoch den Abstand  $l$  kennen, so ließe sich einerseits der richtige Wert der Kenngröße  $l_2$  und andererseits der wirkliche Wert des Abschlußwiderstandes  $\mathfrak{R}_a$  ermitteln. Da  $l$  aus der Transformationskurve nicht bestimmt werden kann, muß es durch eine gesonderte Messung festgelegt werden. Dazu sind verschiedene Wege möglich.

Eine direkte Bestimmung von  $l$  läßt sich durch Abtasten der Spannungsverteilung auf der Abschlußleitung, unmittelbar vor dem Abschlußkolben, durchführen. Man nimmt zu diesem Zweck die Transformationskurve des Vierpols wie üblich auf, wobei man  $\mathfrak{R}_a$  als beweglichen Abschlußkolben benützt. Aus dieser Kurve bestimmt man die Lage von  $\bar{y} = 0$  (dieser Ort hat, von  $D$  aus gemessen, den Abstand  $y_0$ ) sowie die dazugehörige Stellung  $x_s$  des Abschlußkolbens. Stellt man nun den Abschlußkolben auf den Wert  $x_s$  ein, so liegt an der Stelle  $\bar{y} = 0$  ein Spannungsminimum und es erscheint an dieser Stelle der rein Ohmsche Widerstand  $V_1 = p V_0 = p R_{\min}^{(0)}$ . Auf der Abschlußleitung müssen jetzt die Orte von  $V_0$  (Spannungsminimum) und  $x_0$  zusammenfallen. Bestimmt man jetzt mit einer Sonde und Detektor die Lage des letzten Spannungsminimums vor dem Abschlußkolben, so ist diese Lage um den gesuchten Betrag  $l$  vom Abschlußkolben entfernt. (Dazu Abb. 7 und 8.) Aus der Kenntnis von  $l$  läßt sich  $\mathfrak{R}_a$  berechnen, da  $V_0$  bereits aus der Transformationskurve gewonnen wurde.

$$\Re_a = V_a + jW_a = Z_2 \frac{v_0 \cos kl - j \sin kl}{\cos kl - j v_0 \sin kl}$$

$$\left. \begin{aligned} V_a &= Z_2 \frac{2v_0}{1 + v_0^2 + (1 - v_0^2) \cos 2kl} \\ W_a &= Z_2 \frac{(v_0^2 - 1) \sin 2kl}{1 + v_0^2 + (1 - v_0^2) \cos 2kl} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

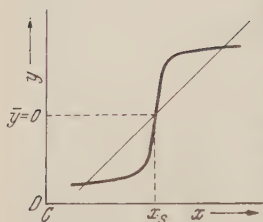


Abb. 7. Ermittlung von  $y=0$  und  $x_s$  aus der aufgenommenen Transformationskurve.

Will man die Abänderung der Meßapparatur, die durch das Hinzufügen einer zweiten Abtastsonde entsteht, vermeiden, so lassen sich durch Vergleichsmessungen mit einem Abschlußkolben von rein *Ohmschem* Widerstand oder einem solchen, der möglichst angenähert einen idealen Kurzschluß hervorruft, Abschlußwiderstände messen, die so große Blindkomponenten besitzen, daß man gegen sie die allenfalls vorhandenen kleinen Blindkomponenten an dem als rein ohmsch vorausgesetzten Widerstand des Vergleichskolbens oder an dem des idealen Kurz-

schlußkolbens vernachlässigen kann. Zur Prüfung des Vergleichskolbens muß man allerdings die vorher beschriebene Methode anwenden. Benützt man nämlich einen Vergleichskolben, dessen Scheinwiderstand unbekannt ist, so läßt sich zeigen, daß es nicht gelingt, durch Einstellen der beiden, nun mit unbekannten Widerständen versehenen Kolben auf gleiche Stellen der Abschlußleitung genügend Gleichungen zur Ermittlung der unbekannten Widerstände der beiden Kolben zu erhalten. Eine noch zusätzlich vorgenommene Messung des Eingangsscheinwiderstandes  $V_1$  kann ebenfalls keine zusätzliche Gleichung liefern.

Ist jedoch der Widerstand des Vergleichskolbens bekannt, so läßt sich der Widerstand des zu messende Abschlußkolbens ähnlich wie bei der direkten Methode bestimmen. Die Stelle der Sonde übernimmt jetzt der bekannte Vergleichskolben. Dabei sind drei Varianten möglich:

#### 1. Vergleichskolben $V_1$ mit idealem Kurzschluß:

Aus der Transformationskurve für  $V_1$  bestimmt man die Kenngrößen  $x_0, y_0, m$  des verlustfreien Vierpols. Aus der Trans-



Abb. 8. Bestimmung des komplexen Abschlußwiderstandes  $\Re_a$  durch Aufsuchen des letzten Spannungsminimums vor  $\Re_a$  auf der Abschlußleitung.

formationskurve für den zu untersuchenden Kolben  $M$  bestimmt man  $v_{01} = \frac{R_{\min}^{(0)}}{Z_2}$  und  $m$  zur Kontrolle des aus der Transformationskurve für  $V_1$  bestimmten Wertes von  $m$  sowie die Stelle  $x_M = x_0 + l$ , für welche an der Stelle  $y_0$  am Vierpoleingang das Spannungsminimum, d.h. der Widerstand  $v_{11} = m v_{01}$  auftritt. Der so gefundene Unterschied der Stellungen von  $V_1$  und  $M$ , bei denen sich jedesmal das Spannungsminimum an derselben Stelle  $y_0$  der Meßleitung befindet, ergibt die Größe  $l$  (Abb. 9). Daraus folgt analog der direkten Methode:

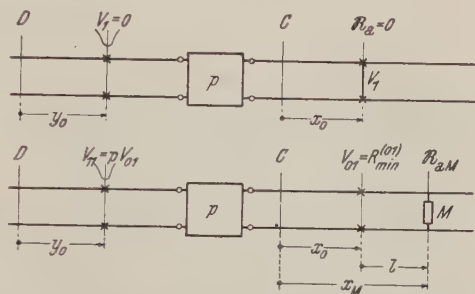


Abb. 9. Bestimmung des komplexen Abschlußwiderstandes  $R_a$  durch Vergleichsmessung mit einem idealen Kurzschlußkolben  $V_1$ .

$$\left. \begin{aligned} V_{aM} &= Z_2 \frac{2 v_{01}}{1 + v_{01}^2 + (1 - v_{01}^2) \cos 2kl} \\ W_{aM} &= Z_2 \frac{(v_{01}^2 - 1) \sin 2kl}{1 + v_{01}^2 + (1 - v_{01}^2) \cos 2kl} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

## 2. Vergleichskolben $V_2$ mit rein Ohmschem Widerstand $v_0$ :

Da die Stellen  $x_0$  und  $y_0$  für denselben Vierpol bei beliebigen Abschlußwiderständen gleichbleiben, wird dasselbe Verfahren wie bei 1. angewandt. Die Größe des rein Ohmschen Widerstandes  $v_0$  des Vergleichskolbens interessiert dabei nicht, da nur die Strecken  $x_0$  und  $y_0$  sowie die Transformationszahl  $m$  aus der Transformationskurve für  $V_2$  ermittelt werden müssen. Es muß lediglich sichergestellt sein, daß  $V_2$  tatsächlich einen rein Ohmschen Widerstand darstellt.

## 3. Vergleichskolben $V_3$ mit bekanntem Scheinwiderstand $R_a = V_a + jW_a$ :

Aus der Transformationskurve für  $V_3$  läßt sich der an die Stelle  $x_0$  transformierte Widerstand  $V_0 = R_{\min}^{(0)}$  des Vergleichskolbens, die Transformationszahl  $m$  des Vierpols sowie der Ort  $y_0$  des Spannungsminimums auf der Meßleitung und die dazugehörige Stellung  $x_s$  des Vergleichskolbens finden. Da  $R_a$  bekannt ist, läßt sich die Strecke  $l$ , um die der Vergleichskolben von der Stelle  $x_0$  entfernt ist, wenn am Ort  $y_0$  der Meßleitung das Spannungsminimum auftritt, sowie die Größe  $v_0$  des nach  $x_0$  transformierten Widerstandes  $R_a$  berechnen:



$$\operatorname{tg} 2kl = -\frac{2w_a}{1-r_a^2}$$

$$v_0 = \frac{2v_a}{1+r_a^2+(1-r_a^2)\cos 2kl-2x_a\sin 2kl}$$

Da  $v_0$  außerdem aus der Transformationskurve für  $V_3$  bestimmbar ist, hat man eine Kontrolle für die Genauigkeit der Bestimmung von  $v_0$ . Der Ort  $x_0$  ergibt sich nun zu  $x_0 = x_s - l$ . Damit sind die Orte  $x_0, y_0$  und die Transformationszahl  $m$  bekannt, so daß das weitere Verfahren dem unter 1. beschriebenen gleicht.

### 5. Experimentelle Bestimmung des Widerstandes eines verlustbehafteten Abschlußkolbens.

Zur experimentellen Überprüfung der im vorigen Kapitel angegebenen Beziehungen wurden Messungen an einem Abschlußkolben vorgenommen, dessen Konstruktion das Auftreten eines komplexen Widerstandes erwarten ließ. Der Widerstand des Kolbens wurde einerseits nach der üblichen Methode durch Messung des Spannungsverhältnisses, bzw. der Knotenbreite und der Knotenverschiebung<sup>3)</sup>, anderseits durch Aufnahme der Transformationskurve eines verlustlosen Vierpols mit dem verlustbehafteten Kolben und mit einem Vergleichskolben, der als Kurzschlußkolben in den Abmessungen und im Aufbau so beschaffen war, daß sich bei der zur Messung verwendeten Wellenlänge sehr kleine Verluste erwarten ließen, bestimmt. Als verlustloser Vierpol wurde die Kombination des am Meßleitungsende sich befindlichen Meßleitungsvierpols, bestehend aus einer Trolitulscheibe zur Abstützung des Innenleiters und der Querschnittsänderung beim Übergang der Meßleitung in die Abschlußleitung, mit einer Stichleitung verwendet, deren verschiebbarer Kolben einen nahezu idealen Kurzschluß hervorrief. Mit diesem variablen Vierpol wurde einerseits bei der Messung nach der üblichen Methode der Meßleitungsvierpol so kompensiert, daß das Übersetzungsverhältnis des idealen Transformators, der durch die Hintereinanderschaltung von Meßleitungsvierpol und Stichleitung gebildet wurde, den Wert 1 hatte. Die Wirkung ist dann so, als ob die Meßleitung ohne Stoßstelle direkt in die Abschlußleitung überginge. Anderseits wurde die Stichleitung dazu verwendet, zusammen mit dem Meßleitungsvierpol einen idealen Transformator herzustellen, der eine Transformationszahl  $> 1$  aufwies. In dieser Schaltung wurden die Transformationskurven zur Bestimmung des Scheinwiderstandes des Abschlußkolbens aufgenommen. Der als Vergleichskolben dienende Kurzschlußkolben wurde durch Einbringen eines mit metallischen Kontaktringen versehenen Hohlzylinders aus Halbleitermaterial, an dessen Stirnseite ein Sektor

aus Aluminiumfolie zur Erhöhung der Dämpfung befestigt war, in einen verlustbehafteten Abschlußkolben verwandelt, dessen Widerstand gemessen wurde.

Die Darstellung des Kurzschlußkolbens und des Einsteckwiderstandes (schematisch) zeigen Abb. 10 und 11. Aus den aufgenommenen Transformationskurven (Abb. 12) und ihrer Lage zueinander wurden folgende Werte entnommen:

$$\alpha_1 = 85^\circ 45'$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = m_1 = 13,46$$

$$\alpha_2 = 16^\circ 30'$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = m_2 = 0,2962$$

$$kl = 0,558.$$

Daraus ergeben sich die Werte

$$m = 3,13 \quad v_0 = 0,283.$$

Aus der Transformationskurve, die mit dem Vergleichskolben aufgenommen wurde, ergab sich zur Kontrolle der Wert von  $m = 3,15$ . Da die Werte von  $m$  mit einem mittleren Fehler von  $1\%$  behaftet waren, ist die Übereinstimmung befriedigend, so daß der verwendete Vierpol und der Vergleichskolben als genügend verlustfrei angesehen werden konnten.



Abb. 10. Abschlußkolben  $V_1$   
(erzeugt sehr angenähert einen idealen Kurzschluß).

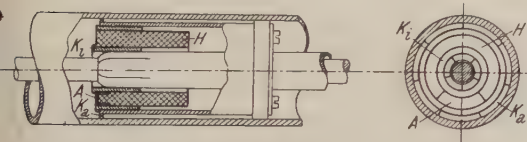


Abb. 11. Einsteckwiderstand.

$H$  = Hohlzylinder aus Halbleitermaterial.

$K_2$  = Äußerer Kontakttring.

$K_1$  = Innerer Kontakttring.

$A$  = Sektor aus Aluminiumfolie.

Dünne Linien: Lage des Widerstandes im Kurzschlußkolben  $V_1$ .

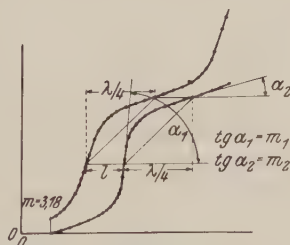


Abb. 12. Experimentell aufgenommene Transformationskurven zur Ermittlung des komplexen Widerstandes eines verlustbehafteten Abschlußkolbens.

Der Widerstand des Abschlußkolbens ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_a &= (0,62 - j 0,99) Z_2 [\Omega] \\ &= 36,9 - j 59,0 [\Omega]. \end{aligned}$$

Die Messung des gleichen Widerstandes nach der Methode des Spannungsverhältnisses ergab als Mittelwert aus sechs Messungen

$$v_0 = 0,286 \quad kl = 0,554.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_a &= (0,62 - j \, 0,98) Z_a [\Omega] \\ &= 36,9 - j 58,4 [\Omega]. \end{aligned}$$

Die Übereinstimmung mit dem nach der neuen Methode gewonnenen Widerstandswert ist sehr befriedigend, zumal bei der verwendeten kleinen Wellenlänge sich geringe Änderungen der Übergangswiderstände schon stark bemerkbar machen.

Abschließend darf bemerkt werden, daß die Anwendung der neuen Methode zur Bestimmung von Scheinwiderständen von beweglichen Abschlußkolben gewisse meßtechnische Vorteile gegenüber der bisher gebräuchlichen Methode aufweist.

1. Die Widerstandsbestimmung ist auf reine Längenmessungen bei Feststellung eines Spannungsminimums auf der Meßleitung zurückgeführt. Für erfolgreiche Messungen ist allerdings eine gute Frequenzkonstanz des Senders Voraussetzung, was jedoch auch für die bisherigen Methoden erforderlich war.

2. Zur Feststellung des Spannungsminimums ist es nicht erforderlich, daß die Charakteristik des Detektors bekannt ist. Für die Messung von Spannungsverhältnis, bzw. Knotenbreite ist die Kenntnis ihres Verlaufes jedoch unbedingt erforderlich.

3. Die Lage des Spannungsminimums auf der Meßleitung erfährt bei Änderungen der vom Sender gelieferten Energie z. B. infolge von Netzspannungsschwankungen keine Änderung, während sich die auf der Leitung auftretende maximale Energie selbst stark ändern kann, wovon ebenfalls wieder die Messung des Spannungsverhältnisses, bzw. der Knotenbreite wesentlich beeinflußt wird. Bei starkem Absinken der Senderenergie macht sich lediglich eine geringe Änderung in der Genauigkeit der Bestimmung der Knotenlage infolge des flacheren Spannungsanstieges beiderseits des Spannungsknotens bemerkbar.

4. Der Widerstand braucht nicht mehr direkt an die Meßleitung angeschlossen zu werden, was infolge der notwendigen Abstützung des Innenleiters am Meßleitungsende nur selten stoßfrei möglich ist oder eine genaue Kompensation der dort auftretenden Störfelder verlangt. Außerdem können bei der neuen Methode gleichzeitig die Transformationseigenschaften dieser Übergangsstellen als Nebenresultat erhalten werden.

Als nachteilig mag in gewissen Fällen der größere Zeitaufwand bei der Durchführung der Messungen und die Forderung einer möglichst hohen Genauigkeit bei der Bestimmung der Steigungen der Transformationskurve gewertet werden.

In Verbindung mit einem variablen verlustfreien Vierpol dürfte das neue Verfahren bei Beachtung der durch Gl. (7a) gegebenen Möglichkeiten als empfindliche Prüfmethode für die Güte von Kurzschlußschiebern von wesentlichem Vorteil sein.

## 6. Anhang.

## a) Beweis des Weißflochschen Transformationssatzes mit Hilfe der Vierpolmatrizen.

Zur Beweisführung seien folgende Widerstandstransformationen betrachtet (siehe Abb. 13):

α) Transformation durch ein Stück einer homogenen, verlustfreien Leitung des Wellenwiderstandes  $Z_2$  und der Länge  $l_2$ , das als linearer, verlustfreier, umkehrbarer Vierpol aufgefaßt werden kann und daher durch die Kettenmatrix  $(l_2)$  gekennzeichnet wird.

β) Transformation durch den verlustfreien, linearen, umkehrbaren Vierpol  $A$ , gekennzeichnet durch die Kettenmatrix  $(a_v)$ .

γ) Transformation durch ein Stück einer homogenen, verlustfreien Leitung des Wellenwiderstandes  $Z_1$  und der Länge  $l_1$ , gekennzeichnet durch die Kettenmatrix  $(l_1)$ .

Die gesamte Transformation besteht aus der Hintereinanderausführung der drei Transformationen  $(l_2)$ ,  $(a_v)$ ,  $(l_1)$  und sei gekennzeichnet durch die Kettenmatrix

$$(t) = (l_1) (a_v) (l_2). \quad (10)$$

Die Transformation eines Widerstandes  $\mathfrak{R}_2$  durch einen linearen Vierpol läßt sich allgemein beschreiben durch

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{a_{11} \mathfrak{R}_2 + a_{12}}{a_{21} \mathfrak{R}_2 + a_{22}}, \quad (11)$$

worin die Größen  $a_{ik}$  die Koeffizienten der Kettenmatrix  $(a)$  des transformierenden Vierpols bedeuten.

Für lineare, umkehrbare Vierpole muß zusätzlich die Bedingung des Umkehrsatzes erfüllt sein, die im System der Kettenmatrix durch die Gleichung

$$\text{Det } (a) = 1 \quad (12)$$

dargestellt wird<sup>1)</sup>.

Für lineare, umkehrbare und verlustfreie Vierpole hat die Kettenmatrix  $(a_v)$  die Gestalt:

$$(a_v) = j \begin{pmatrix} A & B \\ 1 & jC \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Die Beziehung (13) erhält man durch Berechnen der Widerstandstransformation gemäß (11), wenn man berücksichtigt, daß sich jeder lineare, umkehrbare und verlustfreie Vierpol durch eine Ersatz- $T$ -Schaltung, deren sämtliche Widerstände rein

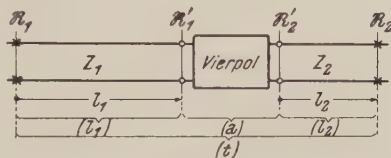


Abb. 13. Darstellung der Widerstandstransformationen zum Beweis des Weißflochschen Transformationssatzes.



imaginär sind, darstellen läßt (Abb. 14) und Gl. (12) erfüllt sein muß.  $A, B, C$  sind reell und kennzeichnen den verlustfreien Vierpol eindeutig (Vierpolkenngrößen).

Die durch (10) bezeichnete Gesamttransformation muß, wenn der Weißflochsche Satz gilt, den Abschlußwiderstand  $\mathfrak{R}_2$  in den Eingangswiderstand  $\mathfrak{R}_1 = p \mathfrak{R}_2$  transformieren. Postuliert man vorläufig die Gültigkeit des Satzes, so muß die Matrix ( $t$ ) die Gestalt haben:

$$(t) = j \begin{pmatrix} \alpha p & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (14)$$

denn es gilt dann nach (11)



Abb. 14. Ersatz-T-Schaltung eines linearen, umkehrbaren Vierpols.

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{a_{11} \mathfrak{R}_2 + a_{12}}{a_{21} \mathfrak{R}_2 + a_{22}} = p \mathfrak{R}_2.$$

Daraus folgt aber

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} p = j \alpha p & a_{21} &= 0 \\ a_{12} &= 0 & a_{22} &= j \alpha \end{aligned}$$

( $j \alpha$  = Proportionalitätsfaktor).

Die Matrix ( $t$ ) besitzt also nur drei verschiedene Koeffizienten  $\alpha p, \alpha, 0$  und charakterisiert damit einen verlustfreien, linearen, umkehrbaren Vierpol. Die Umkehrbarkeitsbedingung  $\text{Det}(a_n) = 1$  ist ebenfalls erfüllt, da  $j \alpha$  als Proportionalitätsfaktor frei wählbar ist.

Um die Gültigkeit des Weißflochschen Satzes zu beweisen, muß nun gezeigt werden, daß

1.  $p$  stets reell ist, wenn  $l_1$  und  $l_2$  den Vierpol ( $a_n$ ) zum Transformator ( $t$ ) ergänzen,

2. zu allen beliebigen Werten der Kenngrößen  $A, B, C$  des Vierpols ( $a_n$ ) reelle Werte für  $l_1$  und  $l_2$  existieren, die den Vierpol ( $a_n$ ) zum idealen Transformator ( $t$ ) ergänzen.

Zum Beweis wird die Transformation ( $t$ ) berechnet und diskutiert. Dazu ist vorerst die Kenntnis der Matrizen ( $l_2$ ) und ( $l_1$ ) nötig. Diese ergeben sich aus den bekannten Leitungsgleichungen für die homogene verlustfreie Leitung. Für ( $l_2$ ) gilt:

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{Z_2 \mathfrak{R}_2 + j Z_2^2 \operatorname{tg} k l_2}{Z_2 + j \mathfrak{R}_2 \operatorname{tg} k l_2} \quad \begin{matrix} l_{11}^{(2)} \mathfrak{R}_2 + l_{12}^{(2)} \\ l_{21}^{(2)} \mathfrak{R}_2 + l_{22}^{(2)} \end{matrix}$$

Daraus folgt:

$$l_{11}^{(2)} = l_{22}^{(2)} = Z_2; \quad l_{12}^{(2)} = j Z_2^2 \operatorname{tg} k l_2; \quad l_{21}^{(2)} = j \operatorname{tg} k l_2.$$

Somit ist

$$(l_2) = \begin{pmatrix} Z_2 & j Z_2^2 a \\ j a & Z_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a = \operatorname{tg} k l_2.$$

Analog ergeben sich für  $(l_1)$  aus der Beziehung

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{Z_1 \mathfrak{R}'_1 + j Z_1^2 \operatorname{tg} k l_1}{Z_1 + j \mathfrak{R}'_1 \operatorname{tg} k l_1} = \frac{l_{11}^{(1)} \mathfrak{R}'_1 + l_{12}^{(1)}}{l_{21}^{(1)} \mathfrak{R}'_1 + l_{22}^{(1)}}$$

die Koeffizienten:  $l_{11}^{(1)} = l_{22}^{(2)} = Z_1$ ;  $l_{12}^{(1)} = j Z_1^2 \operatorname{tg} k l_1$ ;  $l_{21}^{(1)} = j \operatorname{tg} k l_1$ .

Somit ist

$$(l_1) = \begin{pmatrix} Z_1 & j Z_1^2 b \\ j b & Z_1 \end{pmatrix} \text{ mit } b = \operatorname{tg} k l_1.$$

Für  $(t)$  folgt daher nach Kürzung von  $j$ :

$$(t) = \begin{pmatrix} \alpha p & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = (l_1) (a_p) (l_2) = \begin{pmatrix} Z_1 & j Z_1^2 b \\ j b & Z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j A & B \\ 1 & j C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_2 & j Z_2^2 a \\ j a & Z_2 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Die Multiplikation liefert:

$$\begin{pmatrix} \alpha p & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j Z_1 [A Z_2 + B a + Z_1 b (Z_2 - C a)] & Z_1 \{ Z_2 (B - A Z_2 a) - Z_1 b [Z_2 (Z_2 a + C)] \} \\ Z_1 (Z_2 - C a) - b (A Z_2 + B a) & j \{ b [Z_2 (B - A Z_2 a)] + Z_1 [Z_2 (Z_2 a + C)] \} \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich vier Gleichungen für  $p$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $b$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha p}{j Z_1} &= A Z_2 + Z_1 b (Z_2 - C a) + B a \\ 0 &= Z_2 (B - A Z_2 a) - Z_1 b [Z_2 (Z_2 a + C)] \\ 0 &= Z_1 (Z_2 - C a) - b (A Z_2 + B a) \\ \frac{\alpha}{j} &= b [Z_2 (B - A Z_2 a)] + Z_1 [Z_2 (Z_2 a + C)]. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Zur Abkürzung diene:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} &= A Z_2 + B a \\ \beta_{12} &= Z_2 (B - A Z_2 a) \\ \beta_{21} &= Z_2 - C a \\ \beta_{22} &= Z_2 (Z_2 a + C). \end{aligned} \right\} \quad (16a)$$

Man erhält also:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha p}{j Z_1} &= \beta_{11} + Z_1 \beta_{21} b \\ 0 &= \beta_{12} - Z_1 \beta_{22} b \\ 0 &= Z_1 \beta_{21} - b \beta_{11} \\ \frac{\alpha}{j} &= Z_1 \beta_{22} + b \beta_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Aus der 2. und 3. Gleichung von (17) folgt:

$$\beta_{12} = Z_1 b \beta_{22}$$

$$\beta_{21} = \frac{b}{Z_1} \beta_{11}.$$

Einsetzen in die 1. und 4. Gleichung von (17) liefert:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha p}{j Z_1} &= \beta_{11} (1 + b^2) \\ \frac{\alpha}{j Z_1} &= \beta_{22} (1 + b^2) \end{aligned} \right\} \beta_{22} p = \beta_{11},$$

$$p = \frac{\beta_{11}}{\beta_{22}} = \frac{A Z_2 + B a}{Z_2 (Z_2 a + C)}. \quad (18)$$

Da  $A, B, C$  gemäß (13) reell sind und  $Z_2$  als Wellenwiderstand einer homogenen, verlustfreien Leitung desgleichen, ist  $p$  für alle reellen Werte von  $a$  reell. Dasselbe gilt für  $b$ , denn

$$b = \frac{Z_1 \beta_{21}}{\beta_{11}} = \frac{Z_1 (Z_2 - C a)}{A Z_2 + B a}. \quad (18a)$$

Auch  $b$  ist für alle reellen Werte von  $a$  reell, weil  $A, B, C$  gemäß (13) und  $Z_1$  und  $Z_2$  als Wellenwiderstände reell sind. Eliminierung von  $b$  aus der 2. und 3. Gleichung von (17) ergibt

$$-\beta_{12} \beta_{11} + Z_1^2 \beta_{21} \beta_{22} = 0.$$

Setzt man die Werte der  $\beta_{ik}$  aus (16a) ein, so erhält man:

$$Z_1^2 (Z_2 - C a) (Z_2 a + C) - (B - A Z_2 a) (A Z_2 + B a) = 0. \quad (19)$$

Wenn die Gl. (19) nur reelle Werte von  $a$  liefert, ist auch  $p$  reell gemäß (18) und  $b$  reell gemäß (18a) und alle eingangs gestellten Forderungen für die Gültigkeit des *Weißflochschen* Satzes sind dann erfüllt.

Die Ausrechnung von (19) ergibt

$$a^2 + a \frac{Z_1^2 (Z_2^2 - C^2) + A^2 Z_2^2 - B^2}{Z_2 (A B - Z_1^2 C)} - 1 = 0. \quad (20)$$

Die Diskriminante der Gl. (20) ist:

$$\frac{[Z_1^2 (Z_2^2 - C^2) + A^2 Z_2^2 - B^2]^2}{4 Z_2^2 (A B - Z_1^2 C)^2} + 1. \quad (21)$$

Sie ist der Quadrate und der reellen  $Z_1$  und  $Z_2$  wegen für alle beliebigen Werte von  $A, B, C, Z_1, Z_2$  stets positiv, d. h. die Gl. (20) ergibt stets reelle Werte von  $a$ .

Da  $a = \operatorname{tg} k l_2$  und  $b = \operatorname{tg} k l_1$ , gilt, als Folge der Beziehungen (18), (18a), (21) und der für sie aufgestellten Forderungen, der *Weißflochsche* Satz in seiner Gültigkeit als bewiesen. Der Nachweis, daß  $p$  stets positiv ist, erübrigt sich, da die Annahme negativer Transformationszahlen im Widerspruch zu den Voraussetzungen, die für einen linearen, umkehrbaren Vierpol gelten, stehen würde. Ein solcher Vierpol kann nämlich niemals die Transformation eines positiven *Ohmschen* Abschlußwiderstandes in einen negativen *Ohmschen* Eingangswiderstand bewirken.

Aus der Gl. (20) ersieht man noch, daß jeder verlustfreie Vierpol sich auf zwei Arten zu einem idealen Transformator ergänzen läßt, da wegen (21) beide Wurzeln der Gl. (20) reell sind. Man erhält zwei Paare von Längen, nämlich  $[l_1, l_2]$  und  $\left[\left(l_1 \pm \frac{\lambda}{4}\right), \left(l_2 \pm \frac{\lambda}{4}\right)\right]$  sowie die Transformationszahlen:  $p$ , gehörig zum Paar  $[l_1, l_2]$ , und  $p_1 = \frac{1}{p} \frac{Z_1^2}{Z_2^2}$ , gehörig zum Paar  $\left[\left(l_1 \pm \frac{\lambda}{4}\right), \left(l_2 \pm \frac{\lambda}{4}\right)\right]$ , wie in <sup>2)</sup> näher ausgeführt ist.

b) Die Transformation eines rein *Ohmschen* Abschlußwiderstandes nach dem *Weißflochschen* Transformationssatz.

Gemäß Abb. 4 ergeben sich folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{\Re_2}{Z_2} = \frac{v_0 \cos k \bar{x} + j \sin k \bar{x}}{\cos k \bar{x} + j v_0 \sin k \bar{x}}; \quad v_0 = \frac{V_0}{Z_2} \\ r_1 &= \frac{\Re_1}{Z_1} = \frac{v_1 \cos k \bar{y} + j \sin k \bar{y}}{\cos k \bar{y} + j v_1 \sin k \bar{y}}; \quad v_1 = \frac{V_1}{Z_1} = \frac{R_{\min}}{Z_1}. \end{aligned}$$

$\Re_1 = p \Re_2$ , damit ein idealer Transformator entsteht. Daraus folgt  $r_1 = m r_2$  wegen (3) und

$$\frac{v_1 \cos k \bar{y} + j \sin k \bar{y}}{\cos k \bar{y} + j v_1 \sin k \bar{y}} = m \cdot \frac{v_0 \cos k \bar{x} + j \sin k \bar{x}}{\cos k \bar{x} + j v_0 \sin k \bar{x}}.$$

Trennung von Real- und Imaginärteil ergibt die beiden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_1}{\cos^2 k \bar{y} + v_1^2 \sin^2 k \bar{y}} &= \frac{m v_0}{\cos^2 k \bar{x} + v_0^2 \sin^2 k \bar{x}} \\ \frac{(1 - v_1^2) \cos k \bar{y} \sin k \bar{y}}{\cos^2 k \bar{y} + v_1^2 \sin^2 k \bar{y}} &= \frac{m (1 - v_0^2) \cos k \bar{x} \sin k \bar{x}}{\cos^2 k \bar{x} + v_0^2 \sin^2 k \bar{x}} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Setzt man

$$\frac{m v_0}{\cos^2 k \bar{x} + v_0^2 \sin^2 k \bar{x}} = E; \quad \frac{m (1 - v_0^2) \cos k \bar{x} \sin k \bar{x}}{\cos^2 k \bar{x} + v_0^2 \sin^2 k \bar{x}} = F \quad (22a)$$



und

$$\cos k\bar{y} = \gamma; \quad \sin k\bar{y} = \delta; \quad (\gamma^2 + \delta^2 = 1), \quad (22b)$$

so erhält man:

$$\frac{v_1}{\gamma^2 + v_1^2 \delta^2} = E; \quad \frac{(1 - v_1^2) \gamma \delta}{\gamma^2 + v_1^2 \delta^2} = F.$$

Die Auflösung dieser beiden Gleichungen nach  $v_1$ , bzw.  $\gamma$  und  $\delta$  ergibt:

$$v_1 = \frac{E\gamma}{F\delta + \gamma} \quad \text{und} \quad \frac{\gamma\delta}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{-F}{E^2 + F^2 - 1}.$$

Nach Rückeinsetzen von (22b) erhält man:

$$\operatorname{tg} 2k\bar{y} = \frac{-2F}{E^2 + F^2 - 1} \quad (23) \quad \text{und} \quad v_1 = \frac{E}{1 + F \operatorname{tg} k\bar{y}}. \quad (23a)$$

$E$  und  $F$  sind dabei aus Gl. (22a) zu entnehmen. Da  $v_1$  für die Vierpolmessung geringeres Interesse besitzt, wird (23) weiterentwickelt. Einsetzen von Gl. (22a) liefert:

$$\operatorname{tg} 2k\bar{y} = \frac{-2 \frac{m(1 - v_0^2) \cos k\bar{x} \sin k\bar{x}}{\cos^2 k\bar{x} + v_0^2 \sin^2 k\bar{x}}}{\left( \frac{m v_0}{\cos^2 k\bar{x} + v_0^2 \sin^2 k\bar{x}} \right)^2 + \left( \frac{m(1 - v_0^2) \cos k\bar{x} \sin k\bar{x}}{\cos^2 k\bar{x} + v_0^2 \sin^2 k\bar{x}} \right)^2 - 1}.$$

Durch geeignete Zusammenfassung und Anwendung von elementaren trigonometrischen Beziehungen erhält man schließlich die Gl. (5) der Transformationskurve für rein *Ohmschen* Abschlußwiderstand  $v_0$  zu:

$$\operatorname{tg} 2k\bar{y} = \frac{m [2(1 - v_0^4) \sin 2k\bar{x} + (1 - v_0^2)^2 \sin 4k\bar{x}]}{(1 + v_0^2)^2 + 2(1 - v_0^4) \cos 2k\bar{x} + \frac{1}{2}(1 - v_0^2)^2 [1 - m^2 + (1 + m^2) \cos 4k\bar{x}] - 4m^2 v_0^2} \quad (5)$$

c) Berechnung von  $m$  und  $v_0$  aus den Steigungen  $m_1$  und  $m_2$  der Kurve (5) in den Punkten  $\bar{x} = 2n \frac{\pi}{4}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) und  $\bar{x} = (2n + 1) \frac{\pi}{4}$ .

Mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} c &= 2m(1 - v_0^4); \quad d = m(1 - v_0^2)^2; \quad e = 2(1 - v_0^4); \\ f &= \frac{1}{2}(1 - v_0^2)^2(1 + m^2); \quad g = 4m^2 v_0^2 - (1 + v_0^2)^2 - \frac{1}{2}(1 - v_0^2)^2(1 - m^2) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

lautet Gl. (5):

$$\operatorname{tg} 2k\bar{y} = \frac{c \sin 2k\bar{x} + d \sin 4k\bar{x}}{e \cos 2k\bar{x} + f \cos 4k\bar{x} - g}.$$

Die Steigung  $\frac{dy}{d\bar{x}} = \bar{y}'$  ist daher zu finden aus:

$$\frac{2k\bar{y}'}{(\cos 2k\bar{y})^2} = \frac{(2kc \cos 2k\bar{x} + 4kd \cos 4k\bar{x})(e \cos 2k\bar{x} + f \cos 4k\bar{x} - g)}{(e \cos 2k\bar{x} + f \cos 4k\bar{x} - g)^2} - \frac{(c \sin 2k\bar{x} + d \sin 4k\bar{x})(-2ke \sin 2k\bar{x} - 4kf \sin 4k\bar{x})}{(e \cos 2k\bar{x} + f \cos 4k\bar{x} - g)^2}.$$

Unter Benützung der Beziehung  $(\cos 2k\bar{y})^2 = \frac{1}{1 + (\operatorname{tg} 2k\bar{y})^2}$  erhält man für die Steigung:

$$\bar{y}' = \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(c \sin 2k\bar{x} + d \sin 4k\bar{x})^2}{(e \cos 2k\bar{x} + f \cos 4k\bar{x} - g)^2}} \cdot \left[ \frac{(2kc \cos 2k\bar{x} + 4kd \cos 4k\bar{x})(e \cos 2k\bar{x} + f \cos 4k\bar{x} - g)}{(e \cos 2k\bar{x} + f \cos 4k\bar{x} - g)^2} - \frac{(c \sin 2k\bar{x} + d \sin 4k\bar{x})(-2ke \sin 2k\bar{x} - 4kf \sin 4k\bar{x})}{(e \cos 2k\bar{x} + f \cos 4k\bar{x} - g)^2} \right]. \quad (25)$$

Die Schnittpunkte von (5) mit der Geraden  $\bar{x} = \bar{y}$ , bzw.  $\bar{y} = \frac{\lambda}{4}$  treten auf für  $\pm \bar{x} = 0, \frac{\lambda}{2}, \dots, 2n \frac{\lambda}{4}$ ; ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) und für  $\pm \bar{x} = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \dots, (2n+1) \frac{\lambda}{4}$ .

An den Stellen  $\pm \bar{x} = 2n \frac{\lambda}{4}$  ist die Steigung ihrem Absolutbetrag nach größer als an den Stellen  $\pm \bar{x} = (2n+1) \frac{\lambda}{4}$ . Sie wird daher, wie bereits erwähnt, für die Punkte  $\pm \bar{x} = 2n \frac{\lambda}{4}$  mit  $m_1$  und für die Punkte  $\pm \bar{x} = (2n+1) \frac{\lambda}{4}$  mit  $m_2$  bezeichnet. Dann folgt aus (25) für diese Stellen unter Berücksichtigung der entsprechenden Werte von  $\bar{x}$ :

$$\bar{y}' \left[ \pm \bar{x} = 2n \frac{\lambda}{4} \right] = m_1 = \frac{1}{2k} \cdot \frac{(2kc + 4kd)(e + f - g)}{(e + f - g)^2} = \frac{c + 2d}{e + f - g}$$

sowie

$$\bar{y}' \left[ \pm \bar{x} = (2n+1) \frac{\lambda}{4} \right] = m_2 = \frac{1}{2k} \cdot \frac{(-2kc + 4kd)(-e + f - g)}{(-e + f - g)^2} = \frac{2d - c}{f - e - g}.$$

Rückeinsetzen von (24) in vorstehende Gleichungen liefert nach geeigneter Zusammenfassung:

$$m_1 = \frac{m(1-v_0^2)}{1-m^2v_0^2} \quad (26) \quad \text{und} \quad m_2 = \frac{m(v_0^2-1)}{v_0^2-m^2} \quad (26a)$$

Aus den Gleichungen (26) und (26a) lassen sich  $m_1$  und  $m_2$  berechnen:

$$m_1 - m = v_0^2 m (m_1 m - 1); \quad v_0^2 (m_2 - m) = m (m_2 m - 1)$$

$$v_0^2 = \frac{m_1 - m}{m(m_1 m - 1)} = \frac{m(m_2 m - 1)}{m_2 - m}.$$

Daraus folgt:

$$m^2 - \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \cdot m + 1 = 0.$$

Also ergeben sich schließlich die bereits angeführten Gleichungen (6) und (7)

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2 m_1 m_2} \pm \sqrt{\left( \frac{m_1 - m_2}{2 m_1 m_2} \right)^2 - 1} \quad (6)$$

(für  $m > 1$  ist das positive Vorzeichen der Wurzel zu wählen, der andere Wert ist dazu reziprok)

und

$$v_0^2 = \frac{m_1 - m}{m(m_1 m - 1)} = \frac{m(m_2 m - 1)}{m_2 - m}. \quad (7)$$

Meinem sehr verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. P. Urban, sowie Herrn Prof. Dr. E. Ledinegg bin ich für die Anregung zu vorliegender Arbeit und für das fördernde Interesse an ihr zu besonderem Dank verpflichtet.

# Untersuchungen über die Radianabhängigkeit der Durchmesserverfälschung, die bei der mikroskopischen Abbildung kugelförmiger Selenteilchen auftritt.

Von

**F. Helml und J. A. Schedling.**

I. Physikalisches Institut der Universität Wien.

Mit 2 Abbildungen.

*(Eingelangt am 3. November 1950.)*

Ermittelt man den Durchmesser eines kugelförmigen Objektes (Größenordnung ca.  $3 \cdot 10^{-5}$  cm bis  $1 \cdot 10^{-3}$  cm) einerseits durch mikroskopische Ausmessung, andererseits durch irgendeine andere Methode (z. B. nach dem *Stokesschen* Gesetz), so findet man, daß der mikroskopisch gemessene Durchmesser größer ist, als der nach einem anderen Verfahren festgestellte [1]. Ähnliche Ergebnisse lieferten auch Untersuchungen länglich geformter Objekte [2].

Der eine von uns [3] hat nun die mikroskopische Abbildung von Selenkugeln der Größenordnung  $6 \cdot 10^{-5}$  cm bis  $70 \cdot 10^{-5}$  cm untersucht und gefunden, daß, wohl im wesentlichen bedingt durch die Beugung am abbildenden optischen System, eine Radianvergrößerung (in [3] als Beugungskorrektur  $\delta$  bezeichnet) der Kugeln um etwa  $1 \cdot 10^{-5}$  cm für die geltenden optischen Bedingungen in diesem Intervall auftritt. Die auf Grund des für die Beugungskorrektur angewandten Berechnungsverfahrens auftretenden Streuungen von  $\delta$  gestatteten jedoch keine zuverlässige Aussage über die eventuelle Abhängigkeit von  $\delta$  vom wahren (oder scheinbaren) Radius der Objekte.

Eine in jüngster Zeit durchgeführte Untersuchung, in deren Verlauf ca. 40 Selendoppelteilchen von drei Beobachtern ausgemessen wurden — optische Daten: Zeiß Achromat n. A. 0,95, Natriumlicht, Hellfeld — führte zunächst wieder zu Werten der Beugungskorrektur, die starke Streuungen aufwiesen, so daß eine Aussage über die Radianabhängigkeit schwierig erschien. Durch Wahl anderer am Doppelteilchen abzumessender Größen



(ausgemessen wurde die scheinbare Länge des Doppelteilchens  $G_x$  längs der die beiden Kugelmittelpunkte verbindenden Geraden und die scheinbare Länge der auf dieser Geraden normal stehenden Sehne  $s$  des Doppelteilchens — vgl. die

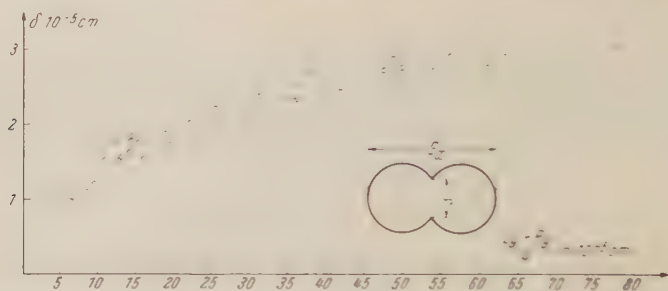


Abb. 1. Mittelwert der Beugungskorrektur in Abhängigkeit vom mittleren scheinbaren Radius.

schematische Skizze in Abb. 1) ergab sich für die Berechnung der Beugungskorrektur ein Verfahren, das gegenüber den auftretenden unvermeidlichen Meßfehlern erheblich weniger empfindlich ist [4].

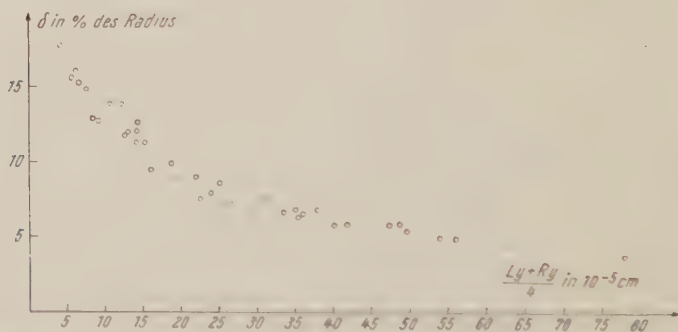


Abb. 2. Mittelwert der Beugungskorrektur in Prozenten des scheinbaren Radienmittelwertes.

Die Ergebnisse der nach diesem Verfahren ausgewerteten Messungen sind in Abb. 1 graphisch dargestellt. In dieser ist der Mittelwert der von den drei Beobachtern gefundenen Beugungskorrekturen in Abhängigkeit vom Mittelwert des zugehörigen mittleren scheinbaren Radius ( $L_y$  scheinbarer Durchmesser des linken Teilchens,  $R_y$  der des rechten) aufgetragen. Die Abb. 2 zeigt den Wert des Mittels der Beugungskorrektur ausgedrückt in Prozenten des zugehörigen scheinbaren Radienmittelwertes.

Eine ausführlich angestellte Fehlerbetrachtung [5] läßt es als gesichert erscheinen, daß die in Abb. 1 dargestellte Abnahme des absoluten Wertes von  $\delta$  mit abnehmendem mittlerem scheinbarem Radius tatsächlich vorhanden ist.

Frl. *Johanna Wein* sei an dieser Stelle für ihre Mitarbeit bei den Ausmessungen und Auswertungen gedankt.

#### Literatur.

- [1] *F. Ehrenhaft*, C. r. **203**, 805 (1936); The Microcoulomb Experiment, *Science*, Vol. 8, Nr. 3, July 1941; *Physikal. Z.* **39**, 19 (1938).
- [2] *E. Moser*, *Ann. Physik* **40**, 121 (1941).
- [3] *J. A. Schedling*, *Acta Physica Austriaca*, Bd. II, Heft 1 (1948).
- [4] *F. Helml*, Untersuchungen über die Radenabhängigkeit der Durchmesserverfälschung, die bei der mikroskopischen Abbildung kugelförmiger Selenteilchen auftritt. Dissertation, Wien (1950).
- [5] Vgl. [4].

# Der Begriff des virtuellen Niveaus in der Theorie der elastischen Streuung von Neutronen an Atomkernen.

Von

**Otto Bergmann.**

Institut für theoretische Physik der Universität Wien.

(Eingelangt am 5. Februar 1951.)

Die Theorie der elastischen Streuung von Neutronen an Atomkernen liefert wertvolle Informationen über den Aufbau der Atomkerne und über das Kraftgesetz, das die Wechselwirkung zwischen Neutronen und Protonen beschreibt. Da aber die Konstanten dieses Wechselwirkungspotentials in den strengen wellenmechanischen Formeln in sehr verwickelter Weise vorkommen, wurden bei der Auswertung der Experimente häufig verschiedene Vernachlässigungen in den strengen Ausdrücken für die Wirkungsquerschnitte vorgenommen. So zeigte *Wigner*<sup>1)</sup>, daß der exakte Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt der elastischen Streuung von Neutronen an Protonen bei kleinen  $n$ -Energien und verschwindender Drehimpulsquantenzahl die einfache Gestalt

$$Q = \frac{2\pi \hbar^2}{m} \frac{1}{E + \epsilon}$$

annimmt, wenn in diesem Zustand ein stabiles Niveau  $\epsilon \sim 0$  existiert. Da  $\epsilon$  unabhängig von Streuexperimenten gemessen werden kann, enthält diese Formel keine unbekannten Größen und erlaubt daher auch keine Rückschlüsse auf das Wechselwirkungspotential. Eben aus diesem Grunde konnte aus der schlechten Übereinstimmung dieser Formel mit den experimentellen Ergebnissen auf die Spinabhängigkeit der Kernkraft geschlossen werden. Der Teil des Wirkungsquerschnittes, der von der Streuung von Partikeln mit antiparalleler Spinrichtung herrührt, wurde dann ebenso angesetzt

$$Q' = \frac{2\pi \hbar^2}{m} \frac{1}{E + \epsilon'}$$

<sup>1)</sup> P. Wigner, Z. Physik **83**, 253 (1933).

worin nun aber  $\varepsilon'$  eine reine Rechengröße war, die man als Funktion der  $^1S$ -Wechselwirkungskonstanten anschreiben konnte, und deren Größe man aus der obigen Gleichung und dem bekannten Wirkungsquerschnitt bestimmen mußte. Man nannte  $\varepsilon'$  ein virtuelles Niveau, und den Singulettzustand entsprechend einen virtuellen Zustand. Es ist der Zweck dieser Arbeit, die verschiedenen Definitionen von  $\varepsilon'$ , wie sie in der Literatur verwendet werden, zusammenzustellen und ihren Gültigkeitsbereich zu diskutieren.

Als Wechselwirkungspotential soll im folgenden

$$V = \begin{cases} -V(r) & r < r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$$

verwendet werden, und für weitergehende numerische Rechnungen soll ferner  $V(r) = V_0 = \text{const}$  gesetzt werden.

Der wichtigste Spezialfall der hier behandelten Probleme ist die Streuung von Neutronen an Protonen. Da dieser Fall auch streng nach dem Zweikörpermodell behandelt werden kann, ist er auch der einfachste. Die Bestimmung des Potentials liefert in diesem Falle direkt die gesuchte Kernkraft, und wurde aus diesem Grunde von mehreren Autoren durchgeführt<sup>2)</sup>. Im folgenden sollen für numerische Abschätzungen die Ergebnisse von *Katscher*<sup>3)</sup> benützt werden.

### 1. Zusammenfassung der strengen Theorie<sup>4)</sup>.

Im Falle der Streuung von Neutronen an Atomkernen nach dem Zweikörpermodell lautet die Schrödingerfunktion bekanntlich nach der allgemeinen *Guth-Sexts*-schen Streutheorie

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{kr} \sum_l i^l (2l+1) A_l \sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi_l(nkr) P_l(\cos \vartheta) \\ &= \frac{1}{kr} \sum_l i^l (2l+1) \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} kr J_{l+1/2}(kr) + \frac{C_l}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} kr H_{l+1/2}^{(1)}(kr) \right\} P_l(\cos \vartheta) \end{aligned}$$

worin  $A_l$  und  $C_l$  komplexe Konstante sind und  $k^2 = 2mE\hbar^2$  und  $n^2 k^2 = 2m(E - V)/\hbar^2$  bedeuten. Für die Berechnung des Wirkungsquerschnittes genügt die Bestimmung von  $C_l$

<sup>2)</sup> *E. Philipp*, Z. Physik **107**, 683 (1937); *W. H. Ramsey*, Proc. Roy. Soc. (A) **191**, 194 (1947); *J. M. Blatt*, *J. D. Jackson*, Physic. Rev. **76**, 18 (1949); *H. A. Bethe*, Physic. Rev. **76**, 38 (1949); *R. S. Christian* u. *E. W. Hart*, Physic. Rev. **77**, 441 (1950) u. a.

<sup>3)</sup> *F. Katscher*, Acta Physica Austriaca **5**, im Erscheinen.

<sup>4)</sup> Zusammenfassung der *Guth-Sexts*-schen Streutheorie und Hinweise auf die Originalarbeiten in *Th. Sexl*, „Vorlesungen über Kernphysik“, Wien, Franz Deuticke 1948, insbesondere S. 121 ff.



$$\frac{C_l}{2} = \frac{\chi'_l(n k r_0) \sqrt{\frac{\pi}{2} k r_0 J_{l+1/2}(k r_0)} - \chi_l(n k r_0) \left( \sqrt{\frac{\pi}{2} k r_0 J_{l-1/2}(k r_0)} \right)'}{\chi'_l(n k r_0) \sqrt{\frac{\pi}{2} k r_0 H_{l+1/2}^{(1)}(k r_0)} - \chi_l(n k r_0) \left( \sqrt{\frac{\pi}{2} k r_0 H_{l-1/2}^{(1)}(k r_0)} \right)'}$$

Wegen  $H^{(1)} = J + iN$  kann dafür auch

$$\frac{C_l}{2} = \frac{-1}{1 + i K_l(k) k}$$

mit

$$K_l(k) = k \frac{\chi'_l(n k r_0) \sqrt{\frac{\pi}{2} k r_0 N_{l-1/2}(k r_0)} - \chi_l(n k r_0) \left( \sqrt{\frac{\pi}{2} k r_0 N_{l+1/2}(k r_0)} \right)'}{\chi'_l(n k r_0) \sqrt{\frac{\pi}{2} k r_0 J_{l+1/2}(k r_0)} - \chi_l(n k r_0) \left( \sqrt{\frac{\pi}{2} k r_0 J_{l-1/2}(k r_0)} \right)'}$$

geschrieben werden, und man erhält für den Wirkungsquerschnitt  $Q$

$$Q = \sum_l Q_l = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \cdot \frac{C_l^2}{2} = \sum_l \frac{4\pi (2l+1)}{k^2 \cdot K_l^2(k)} \quad (1)$$

Bekanntlich ist es zweckmäßig, den Verlauf von  $Q$  als Funktion von  $E$  durch die Angabe der Resonanzniveaus zu charakterisieren. An diesen Stellen ist

$$C_l = -2 \text{ oder } K_l(k_r) = 0$$

und  $Q_l$  lautet in der Umgebung dieser Niveaus<sup>5)</sup>

$$Q_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{(\Gamma/2)^2}{(\Gamma/2)^2 + (E - E_r)^2}$$

wo  $\Gamma$  die Resonanzweite darstellt

$$\Gamma = \left\{ \frac{\pi}{2} k r_0 N_{l+1/2}^2(k r_0) \cdot \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{\chi'_l - \left( \sqrt{\frac{\pi}{2} k r_0 N_{l-1/2}(k r)} \right)}{\sqrt{\frac{\pi}{2} k r_0 N_{l+1/2}(k r)}} \right) \right\} \Big|_{E=E_r}$$

Speziell für  $l=0$  und den vereinfachten Potentialansatz lautet die Definitionsgleichung der Resonanzniveaus

$$n k r_0 \operatorname{ctg} n k r_0 = -k r_0 \operatorname{tg} k r_0.$$

Diese Gleichung hat mit den von *Katscher* angegebenen Werten im  $^3S$ -Zustand die Lösung

$$\boxed{{}^3S: k_r r_0 = 0,942 \quad E_r = 14 \cdot 10^{-6} \text{ erg}}$$

Im  $^1S$ -Zustand existiert dagegen kein Resonanzniveau.

<sup>5)</sup> *Th. Sexl*, Z. Physik **115**, 571 (1940). In dieser Arbeit sind auch Literaturhinweise über andere Ableitungen dieser „Kerndispersionsformel“ zu finden. Über die Anwendung der *Guth-Sexl*-Streutheorie auf die Theorie der Beugung von Lichtwellen, siehe *Th. Sexl* u. *P. Urban*, Z. Physik **114**, 92, 1940.

Die Entwicklung der Formel für den Wirkungsquerschnitt für kleine Energien soll zunächst nur für  $l=0$  durchgeführt werden. Man erhält dann für  $Q_0$

$$Q_0=4\pi r_0^2\cos^2kr_0\left[\frac{\chi_0'}{\chi_0}r_0\frac{\operatorname{tg}kr_0}{kr_0}-1\right]^2\left(\frac{\chi_0'}{\chi_0}r_0\right)^2+k^2r_0^2$$

und entwickelt man  $\chi_0'/\chi_0$  nach Potenzen von  $E$  etwa in der Form

$$\frac{\chi_0'}{\chi_0}r_0=A_0+A_2(kr_0)^2+\ldots$$

so lautet die Formel in erster Näherung in  $E$

$$Q_0=4\pi r_0^2\frac{(1-A_0)^2+(A_0-1)[2A_0\cdot3+2A_2-(A_0-1)](kr_0)^2}{A_0^2+2A_0A_2(kr_0)^2+\ldots+(kr_0)^2}.$$

Ist jetzt  $A_0$  gegen 1 zu vernachlässigen, d. h. hat die Wellenfunktion an der Stelle  $r_0$  bei der Energie Null eine praktisch horizontale Tangente und ist  $r_0$  genügend klein — und daher  $V(r)$  genügend groß, damit  $A_0\ll 1$  erfüllt bleibt — so kann die Formel in der gewünschten Gestalt geschrieben werden

$$Q_0=\frac{4\pi}{(A_0/r_0)^2+k^2}.\tag{2}$$

Für die Potentialmulde ist

$$A_0=[nkr_0\operatorname{ctg}nkr_0]_{E=0}A_2=-\left[\frac{1}{2(nkr_0)^2}(A_0^2-A_0+(nkr_0)^2)\right]_{E=0}$$

und man erhält nach *Katscher*

$^3S:A_0=-0,613$	$A_2=-0,64$
$^1S:A_0'=0,092$	$A_2'=-0,48$

Die Vernachlässigung von  $A_0$  gegenüber 1 ist also im Triplettzustand nicht gerechtfertigt.

Um nun noch die bekannte Bindungsenergie  $\varepsilon$  einzuführen, benützt man die Eigenwertgleichung ( $\kappa^2=2m\varepsilon/\hbar^2$ )

$$\chi_l(n\kappa r_0)\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}i\kappa r_0H_{l+1/2}^{(1)}(i\kappa r_0)\right)'=\chi_l'(n\kappa r_0)\sqrt{\frac{\pi}{2}}i\kappa r_0H_{l+1/2}^{(1)}(i\kappa r_0)\tag{3}$$

die für  $l=0$

$$n\kappa r_0\operatorname{ctg}n\kappa r_0=-\kappa r_0,$$

lautet. Entwickelt man auch hier nach Potenzen von  $\varepsilon$

$$A_0-A_2(\kappa r_0)^2+\ldots=-\kappa r_0$$

so erhält man in erster Näherung  $A_0 = -\kappa r_0$ , was keine gute Approximation darstellt ( $\kappa r_0$  ist tatsächlich 0,473). Die zweite Näherung ist hinreichend genau. Jedenfalls ist die Gleichung (2) im  $^3S$ -Zustand nicht brauchbar.

Bevor auf die Verhältnisse im Singulettzustand eingegangen wird, soll noch eine andere Darstellung derselben Approximation angeführt werden. Wir wollen diese Methode für beliebige  $l$  benützen. Entwickelt man in  $K_l(k)$  die Zylinderfunktionen nach den bekannten Potenzreihen, so erkennt man, daß unter der Voraussetzung

$$[\chi'_l(n\kappa r_0)r_0 - (l+1)\chi_l(n\kappa r_0)]_{E=0} \neq 0$$

$K_l(k)$  in der Form geschrieben werden kann<sup>6)</sup>

$$K_l(k) = \frac{Z}{r_0} \frac{1}{(kr_0)^{2l}} \left\{ M_0 - M_2 (kr_0)^2 - \dots \right\}$$

mit

$$Z = \prod_{v=0}^l (4v^2 - 1)$$

$$M_0 = \left( \frac{\chi'_l r_0 + l \chi_l}{\chi'_l r_0 - (l+1) \chi_l} \right)_{E=0},$$

$$M_2 = - \frac{2l+1}{4} \frac{\chi_l^2}{(\chi'_l r_0 - (l+1) \chi_l)^2} \left\{ 1 + \frac{(2\chi'_l r_0 - 3\chi_l)^2}{(1-2l)(2l+3)} \frac{1}{\chi_l^2} + \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{\chi'_l}{\chi_l} r_0 \right) \right\}$$

und speziell für  $l=0$  und die Potentialmulde

$$Z = -1$$

$$M_0 = \frac{A_0}{A_0 - 1} \quad M_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} M_0^2 - 1 + \frac{M_0}{(n\kappa r_0)^2_{E=0}} \right)$$

mit den numerischen Werten

$^3S: M_0 =$	0,381	$M_2 =$	-0,422
$^1S: M_0 =$	-0,101	$M_2 =$	-0,521

Den Wirkungsquerschnitt erhält man nun im Falle  $l=0$

$$Q_0 = \frac{4\pi r_0^2}{M_0^2 + (1 + 2M_0 M_2)(kr_0)^2 + \dots}$$

und für  $l > 0$

$$Q_l = \frac{4\pi r_0^2 (2l+1)}{Z^2 M_0} \frac{(kr_0)^{4l}}{M_0 + 2M_2 (kr_0)^2 + \dots}$$

<sup>6)</sup> Es ist mit  $C_l + 1 = e^{2i\delta}$ ,  $K_l(k) = k \cotg \delta$ ,  $M_0 = r_0/a$ ,  $M_2 = -\rho/2r_0$ , (a Fermis' Streulänge,  $\rho$  effektive Reichweite).

Da die strenge Eigenwertgleichung (3) auch in der Form

$$i\kappa \frac{X'_l(n\kappa r_0) \sqrt{\frac{\pi}{2} (i\kappa r_0) N_{l+1/2}(i\kappa r_0)} - X_l(n\kappa r_0) \left( \sqrt{\frac{\pi}{2} (i\kappa r_0) N_{l+1/2}(i\kappa r_0)} \right)'}{X'_l(n\kappa r_0) \sqrt{\frac{\pi}{2} (i\kappa r_0) J_{l+1/2}(i\kappa r_0)} - X_l(n\kappa r_0) \left( \sqrt{\frac{\pi}{2} (i\kappa r_0) J_{l+1/2}(i\kappa r_0)} \right)'} = K_l(i\kappa) = -\kappa$$

geschrieben werden kann, findet man, wenn  $\kappa r_0 \ll 1$ ,

$$Z(M_0 - M_2(\kappa r_0)^2 + \dots) = (-1)^{l+1} (\kappa r_0)^{2l+1}.$$

Mit den oben angeführten Zahlenwerten erkennt man, daß erst die zweite Näherung die exakte Eigenwertgleichung gut wiedergibt. Für  $Q$  hat man nun

$$Q_0 = \frac{4\pi}{k^2 + \kappa^2} \frac{1}{1 + 2M_2\kappa r_0 + M_2^2[(\kappa r_0)^2 + (\kappa r_0)^2] + \dots}$$

$$Q_l = \frac{4\pi r_0^2(2l+1)}{Z^2} \left( \frac{\kappa r_0}{M_0} \right)^2 \frac{(k r_0)^{4l}}{(\kappa r_0)^2 + 2(k r_0)^2 + \dots}$$

## 2. Das virtuelle Niveau.

In Zuständen, in denen kein stabiles Niveau existiert, kann diese Elimination von  $A_0$  bzw.  $M_0$  natürlich nicht durchgeführt werden. Dieser Vorgang ist ja nur dann nützlich, wenn  $A_0$  (oder  $M_0$ ) durch eine einfach und genau — unabhängig von Streuexperimenten — meßbare Größe ersetzt werden kann. Trotzdem ist die Einführung einer zum Eigenwert  $\varepsilon$  analogen Größe  $\varepsilon'$  zweckmäßig. Die Singulettwechselwirkung des  $n-p$ -Systems beispielsweise kann dann ebenso durch eine Größe  $\varepsilon'$ , die man das virtuelle Niveau nennt, charakterisiert werden, wie die Triplettwechselwirkung durch  $\varepsilon$ . Da die Definitionsgleichung von  $\varepsilon'$  noch in weiten Grenzen willkürlich ist, wurden verschiedene Gleichungen vorgeschlagen, die alle mehr oder weniger der Eigenwertgleichung analog sind.

Es muß noch betont werden, daß aus Streuexperimenten bei kleinen Energien allein nicht entschieden werden kann, ob in dem in Frage kommenden Zustand ein stabiles oder ein virtuelles Niveau existiert, zumindest dann nicht, wenn  $Q$  durch die empirische Gleichung

$$Q = \frac{4\pi}{A^2 + k^2}$$

approximiert werden kann. Denn nach der allgemeinen Theorie ist  $A^2 = A_0^2 = \kappa^2 r_0^2$  und man kann natürlich immer die entsprechenden Wechselwirkungskonstanten, wenn auch nicht eindeutig, berechnen. Jedoch gibt es andere Methoden, die im



allgemeinen eine Entscheidung zwischen virtuellem und stabilem Zustand erlauben<sup>7)</sup>.

Bekanntlich existiert in einem Zustand nur dann mindestens ein stabiles Niveau, wenn die Wechselwirkung genügend stark ist. Im Falle der Potentialmulde sind diese Bedingungen leicht anzugeben, und man erhält insbesondere für  $l = 0$ ,  $A_0 < 0$ . Da also im  $1S$ -Zustand  $A'_0 > 0$  ist, kann kein stabiles Niveau existieren.

I. Die einfachste Möglichkeit einer Definition des virtuellen Niveaus besteht in der Annahme der zur — allerdings nur näherungsweise geltenden — Eigenwertgleichung  $A_0 = -\kappa r_0$  analogen Gleichung

$$A'_0 = \left| \frac{2m}{\hbar^2} V_0 r_0 \operatorname{ctg} \right| \frac{2m}{\hbar^2} V_0 r_0 = \left| \frac{2m}{\hbar^2} \varepsilon' r_0 - \kappa' r_0 \right| \quad (I)$$

wobei das positive Vorzeichen gesetzt wurde, weil  $A'_0 > 0$  ist. Nach *Katscher* erhält man

$$1S: \kappa'_1 r_0 = 0,092 \quad \varepsilon'_1 = 0,09 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$$

Man kann also hier mit ausreichender Genauigkeit

$$Q'_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{E + \varepsilon'} \quad (4)$$

setzen.

II. Obwohl gegen die Definition nach (I) natürlich keine Bedenken erhoben werden können, wurden doch verschiedentlich andere Definitionen vorgeschlagen. Zum Beispiel wurde, um die Analogie zur Eigenwertgleichung auch dann noch zu erhalten, wenn sich nicht  $\kappa r_0 \ll 1$  ergibt, die transzendente Gleichung

$$n \kappa' r_0 \operatorname{ctg} n \kappa' r_0 = \kappa' r_0 \quad (II)$$

empfohlen<sup>8)</sup>. Es muß hier betont werden, daß es natürlich zunächst gleichgültig ist, ob das „virtuelle Niveau“ dem positiven oder dem negativen Energiespektrum zugerechnet wird, obwohl

<sup>7)</sup> Im Falle der  $n-p$   $1S$ -Wechselwirkung liegt die Entscheidung zugunsten eines virtuellen Zustandes schon durch die experimentell festgestellte Ähnlichkeit dieser  $n-p$ -Wechselwirkung mit der  $p-p$ -Wechselwirkung nahe, wenn man in letzterer von der Coulombkraft absieht. Denn einerseits vermutet man auf Grund dieser Ähnlichkeit die allgemeine Ladungsunabhängigkeit der Kernkraft, andererseits erlaubt das bei der Diskussion der  $p-p$ -Streuung gefundene Kernpotential keine stationären Zustände, wenn man es einfach auf das System  $n-p$  überträgt. Daneben gibt es noch andere Kriterien, z. B. Streuung an  $H^2$ -Molekülen usw.

<sup>8)</sup> G. Breit, H. H. Thaxton, L. Eisenbud, *Physic. Rev.* **55**, 1018 (1939); C. Kittel u. G. Breit, *Physic. Rev.* **56**, 744 (1939); auch N. F. Mott u. H. S. W. Massey, „Theory of Atomic Collisions“ Oxford.

der übliche Gebrauch des Wortes einen positiven Energiebetrag meint. Da nämlich bei der oben angegebenen kritischen Wechselwirkung gerade noch ein stabiles Niveau mit  $\varepsilon = 0$  auftritt, spricht man bei schwächerer Wechselwirkung von einem positiven (virtuellen) Niveau. Mit abnehmender Wechselwirkung wandert also das zuerst negative stabile Niveau immer mehr zu  $E = 0$ , erreicht diesen Wert für die kritische Wechselwirkung und geht dann in das positive Energiespektrum als virtuelles Niveau über. Trotz dieser anschaulichen Interpretation kann natürlich (II) auf die beiden verschiedenen Arten gelesen werden

$$\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 + E')} r_0 \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 + E')} r_0 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E'} r_0 \quad (\text{II a})$$

$$\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - \varepsilon')} r_0 \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - \varepsilon')} r_0 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \varepsilon'} r_0 \quad (\text{II b})$$

Im Falle (IIa) ist das virtuelle Niveau ein positiver Energiewert  $E'$ , im Falle (IIb) ein negativer  $-\varepsilon'$  mit  $\varepsilon' > 0$ . Für Definitionen, die das virtuelle Niveau positiv erklären, sollen im folgenden die Symbole  $E'$  bzw.  $k'$  verwendet werden, während  $\varepsilon'$  und  $\kappa'$  nur für negative virtuelle Niveaus gebraucht werden soll.

Nach (IIa) erhält man

$$^1S: k'_{\text{IIa}} r_0 = 0,085 \quad E'_{\text{IIa}} = 0,07 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$$

und nach (IIb)

$$^1S: \kappa'_{\text{IIb}} r_0 = 0,092 \quad \varepsilon'_{\text{IIb}} = 0,1 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$$

Die Werte sind also nicht wesentlich verschieden von dem nach (I) berechneten und auch die Abweichung zwischen (IIa) und (IIb) ist nur geringfügig. Es sei noch erwähnt, daß (IIb) nur dann Lösungen besitzt, wenn

$$1 < \frac{2m}{\hbar^2} V_0 r_0 < \frac{\pi^2}{4}$$

was im  $^1S$ -Zustand des Systems  $n-p$  der Fall ist. Wegen der Kleinheit von  $k' r_0$  bzw.  $\kappa' r_0$  kann wieder die linke Seite von (II) entwickelt werden

$$\begin{aligned} A_0 + A_2 (k' r_0)^2 + \dots &= k' r_0 \\ A_0 - A_2 (\kappa' r_0)^2 + \dots &= \kappa' r_0. \end{aligned}$$

Wie man leicht erkennt, ist die Gleichung (IIa) der Beziehung

$$K_0(k') = k' \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - k' r_0 \right) \sim k' (1 + k' r_0 + \dots)$$

äquivalent, und da  $\text{ctg}(\pi/4 - k'r_0) \sim 1$ , gilt näherungsweise  $K_0(k') = k'$ . Durch Vergleich mit der exakten Gleichung  $Q$  erkennt man, daß dieses  $E'$  jenen Energiewert bezeichnet, bei dem  $Q$  auf die Hälfte seines Wertes bei  $E = 0$  abgefallen ist (Halbwertsbreite), wie ja auch unmittelbar aus der Brauchbarkeit von (4) mit dieser Definition von  $\epsilon'$  folgt.

III. Offensichtlich wäre die exakte Definition einer solchen Halbwertsbreite

$$K_0(k'_{\text{III}}) = k_{\text{III}} \quad (\text{III})$$

wobei nur vorausgesetzt werden muß, daß  $K_0(k)$  im Intervall  $0 < E < E'_{\text{III}}$  praktisch konstant bleibt. In der Umgebung dieses Energiewertes  $E'_{\text{III}}$  gilt die Gleichung (4) streng. Eine analoge Gleichung, die dieselbe Interpretation erlauben würde  $K_0(k'_{\text{III}}) = -k'_{\text{III}}$  hat für kleine  $E'_{\text{III}}$  keine Lösung. (III) ergibt für die Potentialmulde und  $l = 0$

$$n k' r_0 \text{ctg } n k'_{\text{III}} r_0 = k'_{\text{III}} r_0 \text{ctg} \left( k'_{\text{III}} r_0 + \frac{\pi}{4} \right).$$

Man erkennt, daß (III) sicher immer brauchbar ist, wenn die Bedingung

$$\frac{\sqrt{3}\pi}{4} \leq \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} V_0} r_0 \leq \frac{\pi}{2}$$

erfüllt ist. Es gilt die Entwicklung

$$-(M_0 + M_2 (k'_{\text{III}} r_0)^2 + \dots) = k'_{\text{III}} r_0$$

und man erhält nach *Katscher*

$$^1S: k'_{\text{III}} r_0 = 0,11 \quad E'_{\text{III}} = 0,13 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$$

$Q_0$  lautet in der Umgebung von  $k'_{\text{III}}$

$$Q_0 = \frac{4\pi}{k^2 + k_{\text{III}}^2 + 2 M_0 M_2 [(k r_0)^2 - (k'_{\text{III}} r_0)^2] + \dots}$$

und da  $2 M_0 M_2 \sim 0,1$ , ist die Genauigkeit der Formel in genügender Nähe von  $E'_{\text{III}}$  einleuchtend. Der Vorteil dieser Definition liegt vor allem darin, daß sie auch im  $^3S$ -Zustand brauchbar ist, wenn statt (III) die Definition  $K_0(k_{\text{III}}) = -k_{\text{III}}$  verwendet wird.

$$^3S: k_{\text{III}} r_0 = 0,343 \quad E_{\text{III}} = 1,85 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$$

IV. Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß manche Autoren<sup>9)</sup> die Berechnung des virtuellen Niveaus aus der Gleichung

$$M_0 + M_2 (k'_{\text{IV}} r_0)^2 = -k'_{\text{IV}} r_0 \quad (\text{IV})$$

<sup>9)</sup> So *J. M. Blatt* u. *J. D. Jackson*, siehe Fußnote 2, ferner *H. A. Bethe* u. *C. Longmire*, *Physic. Rev.* **77**, 647 (1950).

durchführen, was natürlich mit ausreichender Genauigkeit mit den früheren Definitionen übereinstimmt. Jedenfalls stellt (III) die natürlichste Verallgemeinerung von (IV) dar.

Während die bisher erwähnten Gleichungen in enger Analogie zur Eigenwertgleichung des  $^3S$ -Zustandes standen, oder zumindest so gewählt waren, daß die Formel für  $Q$  möglichst gut durch eine der Gestalt (4) approximiert werden kann, sollen nun zwei Definitionen besprochen werden, die die Analogie mit anderen Gleichungen herstellen.

V. So kritisieren *Flügge* und *Hückel*<sup>10)</sup> die Verwendung der Gleichung (4) und setzen statt dessen

$$Q_0 = \frac{4\pi}{k^2 + r_0^2/4 \cdot (k_v^2 - k^2)^2} \quad (V)$$

Vergleich mit der strengen Formel für  $Q$  zeigt

$$M_0 = \pm \frac{(k_v r_0)^2}{2} \quad M_2 = \mp \frac{1}{2}$$

was unter der Voraussetzung über  $M_2$  mit der exakten Formel bis Glieder  $(k r_0)^2$  übereinstimmt. Man erkennt, daß diese Definition im wesentlichen mit der Kerndispersionsformel übereinstimmt. Da aber im  $^1S$ -Zustand, wie bereits erwähnt, kein Resonanzniveau vorkommt, ist diese Gleichung in diesem Falle nicht anwendbar. Man erkennt das auch sofort aus den experimentellen Werten. Es ist sowohl  $M'_0$  als auch  $M'_2$  negativ, im Widerspruch mit der obigen Gleichung. Man müßte im  $^1S$ -Zustand statt (V)

$$Q'_0 = \frac{4\pi}{k^2 + r_0^2/4 (k_v'^2 + k^2)^2} \quad (V')$$

setzen mit

$$M'_0 = \pm \frac{(\kappa'_2 r_0)^2}{2} \quad M'_2 = \mp \frac{1}{2}$$

Man erhält dann nach (V) bzw. (V')

$^3S: k_v r_0 = 0,87$	$E_v = 12 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$
$^1S: \kappa'_v r_0 = 0,45$	$\epsilon'_v = 2,15 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$

Man kann die Gleichung in der Weise interpretieren, daß im  $^1S$ -Zustand ein Resonanzniveau mit negativem Wert vorhanden ist. Tatsächlich kann die strenge Definitionsgleichung der

<sup>10)</sup> *S. Flügge* u. *E. Hückel*, *Physic. Rev.* **73**, 520 (1948). Anschließende Bemerkungen von *Ta-You-Wu* u. *H. H. Foley*, *Physic. Rev.* **73**, 1117 (1948) u. *L. Eisenbud*, *Physic. Rev.* **73**, 1407 (1948).



Resonanzniveaus auf negative Energien erweitert werden, und man erhält

$$n \kappa_r r_0 \operatorname{ctg} n \kappa_r r_0 = \kappa_r r_0 \mathfrak{Z} g \kappa_r r_0.$$

Im Singulettzustand ergibt dies

$$^1S: \kappa_r r_0 = 0,46 \quad \varepsilon_r = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$$

Die Definitionen (V) und (V') sind mit der Resonanzgleichung äquivalent, solange  $\kappa_r r_0 \ll 1$ . Denn die Resonanzbedingung  $K_0 = 0$  kann in diesem Falle entwickelt werden, und man erhält bzw.

$$-(M_0 + M_2 (k_r r_0)^2 + \dots) = 0$$

$$-(M_0 - M_2 (\kappa_r r_0)^2 + \dots) = 0$$

also  $M_0 = -M_2 (k_r r_0)^2, \quad M_0 = M_2 (\kappa_r r_0)^2.$

Setzt man nun  $M_2 = -\frac{1}{2}$ , so folgt direkt die Beziehung von Flügge und Hückel.

VI. Wohl die physikalisch plausibelste Definition gab Hulthén<sup>11)</sup>. Leider sind die von ihm angegebenen exakten Definitionsgleichungen sehr kompliziert. Hulthén nennt jene positiven Energiewerte  $E_{vi}$  virtuelle Niveaus, bei denen gerade die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Neutrons im Kerninnern maximal ist. Mit den normierten Wellenfunktionen im Innenraum<sup>12)</sup>

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 \operatorname{ctg}^2 n k r_0}} \frac{1}{r} \frac{\sin n k r}{\sin n k r_0}$$

wobei die Zahlenfaktoren weggelassen wurden, ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit proportional der Größe

$$S(E) = \int_0^{r_0} \chi^2 dr$$

für die man erhält

$$S(E) \sim \sqrt{\frac{E}{E + V_0}} \frac{2 n k r_0 - \sin 2 n k r_0}{E + V_0 - \frac{V_0}{2} \cos 2 n k r_0} \quad (\text{VI})$$

Für  $E = 0$  ist  $S(E)$  im allgemeinen Null, für große  $E$  ist  $S \sim E^{-1/2}$ ; es muß also mindestens ein Maximum vorhanden sein. Die Energiewerte  $E$ , die diesen Maxima entsprechen, sollen virtuelle

<sup>11)</sup> L. Hulthén, Ark. f. Matem. Astr. och Fys. (B) 29, Nr. 1 (1942), vgl. auch S. Flügge u. H. Marschall, „Rechenmethoden der Quantentheorie“, I. Teil, Berlin und Göttingen, Springer-Verlag 1947, S. 47.

<sup>12)</sup> Th. Seixl, „Vorlesungen über Kernphysik“, Wien, Franz Deuticke 1948, S. 146.

Niveaus genannt werden. Liegt  $2mV_0r_0^2/\hbar^2$  in der Nähe des kritischen Wertes  $\pi^2/4$

$$\frac{2mV_0}{\hbar^2}r_0^2 = \frac{\pi^2}{4} - \beta$$

so kann nach  $\beta$  entwickelt werden

$$S(E) = \frac{\sqrt{E}}{k^2 r_0^2 + \beta^2/4}.$$

Das Maximum dieser Funktion liegt bei

$$k^2 r_0^2 = \beta^2/4. \quad (VI')$$

Ist  $\beta < 0$ , so existiert ein stabiles Niveau, und eine einfache Rechnung zeigt, daß die Eigenwertgleichung approximativ

$$k^2 r_0^2 = \frac{\beta^2}{4}$$

lautet in vollkommener Analogie zur Definition des virtuellen Niveaus. Die Definition des virtuellen Niveaus (VI) kann nach *Hulthén* auch auf Zustände angewendet werden, in denen ein stabiles Niveau existiert. Für kleine negative  $\beta$  ist ein virtuelles und ein stabiles, für kleine positive  $\beta$  dagegen nur ein virtuelles Niveau vorhanden. *Hulthén* zeigt auch, daß seine Definition mit  $\beta \sim 0$  dieselben Werte wie (II)<sup>13</sup> gibt und führt schließlich höhere virtuelle Niveaus ein.

ad II. Wir kehren nun nochmals zur Definition (II b) zurück und werden für diese eine einfache, wenn auch rein formale Deutung finden. Zu diesem Zwecke definieren wir den „Wirkungsquerschnitt“ auch für negative Energien und übernehmen weiterhin die bisher verwendete Wellenfunktion. Da  $\chi^{(a)}$  nun für große  $r$  über alle Grenzen wächst, ist selbstverständlich für beliebige  $E$  eine physikalische Interpretation unmöglich. Nur für jene  $k = i\kappa$ , für die der Koeffizient der *Hankelschen* Funktion zweiter Art verschwindet, kann die Wellenfunktion normiert werden, und diese Energien stellen dann die stationären Zustände dar. Als Definitionsgleichung kann man also schreiben

$$C_l \rightarrow \infty \text{ oder } K_l(i\kappa) = -\kappa$$

(und daher natürlich  $A_l \rightarrow \infty$ ). Daraus folgt

$$Q(-\varepsilon) \rightarrow \infty.$$

Die Approximation der Gleichung (1) durch die Hyperbel (2) hat also ihre Berechtigung, solange  $\varepsilon \sim 0$ .

<sup>13</sup> Siehe auch *L. Rosenfeld*, „Nuclear Forces“, Nort-Holland Publ. Comp. Amsterdam 1948, S. 85.

Dieselbe Überlegung kann aber im Singulettzustand angewandt werden. Zwar gibt es dort keinen Eigenwert, da aber in  $Q$  nur der Absolutbetrag von  $C_l^2$  vorkommt, kann man einfach

$$C_l^* \rightarrow \infty \quad K_l(i\kappa') = \kappa'$$

setzen<sup>14)</sup>. Auch hier wird

$$Q'(-\varepsilon') \rightarrow \infty$$

und die Approximation von  $Q'$  durch die Hyperbel mit dem Pol bei  $-\varepsilon'$  ist unter derselben Voraussetzung wie oben erlaubt. Die Definitionsgleichung lautet in diesem Falle für die Potentialmulde und  $l=0$  explizit

$$n\kappa' r_0 \operatorname{ctg} n\kappa' r_0 = \kappa' r_0$$

was mit (IIb) übereinstimmt. (IIb) steht also zur Eigenwertgleichung — freilich nur in formaler Hinsicht — in enger Beziehung.

Um die Bedeutung der obigen Beziehung  $C_l^* \rightarrow \infty$  noch klarer zu erkennen, schreibt man  $\chi^{(a)*}$  auf.  $C_l^* \rightarrow \infty$  heißt dann offensichtlich, daß das Glied  $e^{-\kappa' r}$  verschwindet, also nur der divergierende Anteil  $e^{+\kappa' r}$  übrigbleibt. Man könnte die so definierte Größe ein „labiles Niveau“ nennen, da die Außenraumlösung in diesem Energiewert nur aus dem divergierenden Anteil besteht, oder genauer gesagt, daß die Lösung, die im Nullpunkt verschwindet, in großer Entfernung sich verhält wie  $e^{+\kappa' r}$ .

Die hier erwähnte Definition steht natürlich in gewisser Beziehung zur Heisenbergschen  $S$ -Matrix<sup>15)</sup>. Schreibt man die Wellenfunktion in der asymptotischen Gestalt

$$\chi \sim e^{ikr} - S(k)e^{-ikr}$$

so ist  $S = C_l \cdot 1$  und bestimmt für positive Energien den Wirkungsquerschnitt. Die gebundenen Zustände erhält man dagegen durch die allgemeine Vorschrift

$$S(i\kappa) = 0.$$

Wie jedoch *Ma*<sup>16)</sup> in dem speziellen Fall des Exponentialpotentials gezeigt und *Jost*<sup>17)</sup> allgemeiner untersucht hat, können unter gewissen Umständen neben den richtigen Nullstellen von  $S(k)$  noch „falsche“ auftreten, die keinen stationären Zuständen entsprechen. Bei abbrechenden Potentialfunktionen kann diese Anomalie jedoch nicht vorkommen, wie *Jost* allgemein bewies.

<sup>14)</sup> \* bedeutet konjugiert komplex.

<sup>15)</sup> W. Heisenberg, *Z. Physik* **120**, 513, 673 (1943); C. Møller, *Kgl. Danske Vidensk. Selskab.* **23**, Nr. 1 (1945), **24**, Nr. 19 (1946).

<sup>16)</sup> S. T. Ma, *Physic. Rev.* **69**, 668 (1946).

<sup>17)</sup> R. Jost, *Helv. Phys.* **20**, 256 (1947); vgl. auch J. Meixner, *Z. Naturforsch.* **3a**, 75 (1948).

Die oben definierten labilen Niveaus sind einfach durch

$$S(i\kappa') \rightarrow \infty$$

gegeben. Nur der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß es keine „falschen Singularitäten“ der Größe  $S(k)$  gibt, daß also jeder Singularität ein labiles Niveau entspricht. Im Falle des Exponentialpotentials

$$V = V_0 e^{-r/a} \quad V_0 = \frac{\hbar^2}{2m} U$$

ist die Lösung durch

$$\chi = e^{ikr} - \frac{J_{-2aki}(2a\sqrt{U}) \Gamma(-2aki+1)}{J_{+2aki}(2a\sqrt{U}) \Gamma(+2aki+1)} (2a\sqrt{U})^{4aki} e^{-ikr}$$

gegeben. Die stationären Zustände entsprechen den Nullstellen ( $k = i\kappa$ )

$$J_{2a\kappa}(2a\sqrt{U}) = 0$$

während die falschen Nullstellen durch

$$\frac{1}{\Gamma(-2ak+1)} = 0 \quad \varepsilon = \frac{\hbar^2}{8ma^2} (n+1)^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

bestimmt sind. Man erkennt übrigens leicht, daß bei diesen Energien die Lösungsfunktion identisch in  $r$  verschwindet, was nach Jost ganz allgemein charakteristisch für die falschen Nullstellen ist. Die „labilen“ Niveaus schließlich sind einzig durch die Gleichung

$$J_{-2a\kappa'}(2a\sqrt{U}) = 0$$

bestimmt.

Zum Schlusse möchte ich Herrn Prof. Dr. Th. Söxl für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele Ratschläge ergebenst danken.



# Ein Verfahren zur gleichzeitigen Bestimmung von effektivem Filmradius und Kollineationsfehlern bei Weißenbergkamas.

Von

H. Fischmeister.

Institut für theoretische und physikalische Chemie der Universität Graz.

(Eingelangt am 7. März 1951.)

Wenn es notwendig ist, Gitterkonstanten mit größerer Genauigkeit als  $2 \dots 3\%$  aus Weißenbergaufnahmen zu bestimmen, so muß dafür gesorgt werden, daß die Achse des Filmzylinders mit der Drehachse der Kamera genau zusammenfällt. Mangelhafte Kollineation der beiden Achsen bewirkt eine (im allgemeinen Fall für jede Translationsstellung des Filmhalters verschiedene) Exzentrizität des Kristalls gegenüber dem Film. Dies und die Schrumpfung des Films beim Entwickeln sind die bedeutendsten apparativen Fehlerquellen bei der Gitterkonstantenbestimmung. Ihr Einfluß kann durch das hier beschriebene Kalibrierungsverfahren ausgeschaltet werden.

Mißt man auf einer Drehkristallaufnahme den  $4\vartheta$  entsprechenden Abstand  $S$  korrespondierender Äquatorreflexe auf der oberen und der unteren Filmhälfte, so wird diese Größe bekanntlich<sup>1)</sup> nur von der Exzentrizitätskomponente parallel zur Richtung des Primärstrahles,  $\delta_x$ , beeinflußt; es gilt:

$$S' = S - 2\delta_x \sin 2\vartheta; \quad S = 4\vartheta \cdot \frac{2\pi R_{\text{eff}}}{360}. \quad (1)$$

Gestrichene Zeichen stehen für auf dem Film gemessene, ungestrichene für berechnete Werte.  $\delta_x$  werde in Richtung des Primärstrahles positiv gezählt. Der „effektive Filmradius“  $R_{\text{eff}}$  (also der für die Filmschrumpfung korrigierte Radius des Filmhalters) ist für Weißenbergkamas gewöhnlich nicht bekannt und kann auch — wegen der Unmöglichkeit, Reflexe mit  $2\vartheta \rightarrow 180^\circ$  in gewöhnlichen Weißenbergkamas zu erhalten — nicht nach den üblichen Kalibrierungsverfahren bestimmt wer-

1) A. J. Bradley u. A. H. Jay, Proc. Phys. Soc. **44**, 536 (1932).

den. Um von ihm unabhängig zu werden, bilden wir  $S/S_0 = \vartheta/\vartheta_0$  und  $S'/S'_0$ , wobei  $S_0$  und  $S'_0$  sich auf den innersten Reflex beziehen. Für die Differenz  $S'/S'_0 - S/S_0$  kann man wegen  $2\delta_x \sin 2\vartheta_0 \ll S_0$  schreiben:

$$\frac{S'}{S'_0} - \frac{S}{S_0} \approx 2\delta_x \cdot \frac{1}{S'_0} \left( \frac{S'}{S'_0} \sin 2\vartheta_0 - \sin 2\vartheta \right). \quad (2)$$

In diesen Ausdruck gehen nur gemessene oder berechenbare Größen ein.

Wäre die Exzentrizitätskomponente  $\delta_y$  (senkrecht zur Richtung des Primärstrahles) gleich Null, so würden korrespondierende Reflexe auf der oberen und der unteren Filmhälfte je um den gleichen Betrag  $y$  vom Primärstrahl-Durchstoßpunkt entfernt sein. Eine kleine Exzentrizität  $\delta_y$  bewirkt folgende Verschiebungen der Reflexlagen:

auf der oberen Filmhälfte:  $y'_1 = y - \delta_y (1 - \cos 2\vartheta)$ ,

auf der unteren Filmhälfte:  $y'_2 = y + \delta_y (1 - \cos 2\vartheta)$ ,

also 
$$y'_2 - y'_1 = 2\delta_y (1 - \cos 2\vartheta), \quad (3)$$

worin  $\vartheta$  wieder den errechneten Winkel bedeutet;  $\delta_y$  wird aufwärts positiv gezählt.  $\delta_x$  und  $\delta_y$  erhält man entsprechend (2) und (3) am besten aus den graphischen Darstellungen als halbe Steigung der mittelnden Geraden.

Nach Berechnung der Exzentrizitätskomponente  $\delta_x$  kann man die Werte  $S'$  nach (1) korrigieren und daraus durch Mittelung den effektiven Filmradius ableiten. Die Streuung der Werte für  $R_{\text{eff}}$  gibt eine Kontrollmöglichkeit für die Genauigkeit der Exzentrizitätskorrektur.

Die Berücksichtigung der Korrekturen für  $\delta_x$  und  $\delta_y$  bei der Auswertung von Äquator-Weissenbergaufnahmen kann ohne Mehrarbeit geschehen, wenn das von *Buerger*<sup>2)</sup> beschriebene Verfahren zur direkten Messung von  $\omega$  und  $\xi$  auf dem Film verwendet wird. Ist die Exzentrizität von der Filmtranslation  $z$  unabhängig, so wird die korrigierte  $\xi$ -Skala auf das Meßdreieck aufgetragen; andernfalls muß sie als Kurven- (resp. annähernde Geraden-) Schar auf ein durchsichtiges Unterlagsblatt gezeichnet werden:

$$y' = y(\xi) + \delta_y(z)[1 - \cos 2\vartheta(\xi)] + \delta_x(z) \sin 2\vartheta(\xi).$$

Im allgemeinen genügt Berechnung von  $y'$  für etwa drei verschiedene Translationsstellungen  $z$ .

Zur genauen Bestimmung der Gitterkonstanten wird man natürlich auf direkte Messungen der  $y'$ -Werte auf dem Film zurückgreifen und die Korrekturen einzeln numerisch durch-

2) M. J. Buerger, X-Ray Crystallography, New York 1942, Wiley.

führen. Es ist zu berücksichtigen, daß auch der auf dem Film gemessene Schichtlinienabstand korrigiert werden muß:

$$z = z' + \delta_x \operatorname{tg} \nu = z' \frac{R_{\text{eff}}}{R_{\text{eff}} - \delta_x}.$$

Dabei ist  $z'$  der im Schnittpunkt der betreffenden Schichtlinie mit der Mittellinie (Nullmeridian) gemessene Abstand. Bei einer Kamera mit nur horizontaler Exzentrizität, also  $\delta_y = 0$ , kann der richtige Schichtlinienabstand direkt an der Schnittstelle mit dem 90°-Meridian gemessen werden.

Bei mikroskopischer Vermessung der Reflexlagen auf dem Drehkristallfilm und Verwendung enger Blenden zur Definition des Primärstrahles kann für  $S'$  eine Genauigkeit von  $\pm 0,01$  mm oder besser erreicht werden.  $S_0'$  wird man durch wiederholte Messung möglichst genau zu bestimmen suchen. Ein Meßfehler  $v$  in  $S'$  und ein solcher  $v_0$  in  $S_0'$  bewirken in  $S' S_0' - S S_0$  den Fehler:

$$V = \frac{1}{S_0'} \left( v - v_0 \frac{S'}{S_0'} \right),$$

welcher in praxi unter 0,001 gehalten werden kann. Es lohnt daher,  $S' S_0'$  und  $\vartheta/\vartheta_0$  auf vier Dezimalstellen zu berechnen.

Tab. 1. Zur Berechnung der Exzentrizitätskomponenten aus NaCl-Kalibrierungsaufnahmen.

hkl	$\vartheta/\vartheta_0$	$\sin 2\vartheta$	$(1 - \cos 2\vartheta)$
200 $\beta$	1,0000	0,479 = $\sin 2\vartheta_0$	0,123
200 $\bar{\alpha}$	1,1101	0,527	0,150
220 $\beta$	1,4298	0,656	0,245
220 $\bar{\alpha}$	1,5916	0,722	0,302
400 $\beta$	2,0705	0,860	0,490
400 $\bar{\alpha}$	2,3197	0,912	0,585
420 $\beta$	2,6377	0,968	0,750
440 $\beta$	3,1003	1,000	0,980
440 $\alpha_1$	3,5425	0,980	1,199
600 $\alpha_1$	3,8546	0,937	1,353
620 $\alpha_1$	4,1863	0,866	1,498

Die numerische Berechnung der Exzentrizitäten und der Korrekturen für  $y(\xi)$  kann bei Vorhandensein geeigneter Tabellen innerhalb weniger Stunden durchgeführt werden. Deswegen sind in Tab. 1 die für die Berechnung der Exzentrizitätskomponenten benötigten Werte von  $\vartheta/\vartheta_0$ ,  $\sin 2\vartheta$  und  $(1 - \cos 2\vartheta)$  für die leicht erhältlichen Reflexe von NaCl angegeben. Der Rechnung wurden die Wellenlängenwerte der Internationalen Tabellen für Cu-K-Strahlung zugrunde gelegt; für jene Reflexe,

die gewöhnlich keine Auflösung zwischen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  zeigen, wurde der dem Intensitätsverhältnis entsprechende Mittelwert  $\bar{\alpha} = 1,542 \text{ \AA}$  zugrunde gelegt. Tab. 2 ist eine Erweiterung der von *Buerger*<sup>2)</sup> für  $y(\xi)$  veröffentlichten. Sie gibt die zur Aufstellung der korrigierten  $\xi$ -Skala benötigten Werte von  $\sin 2\vartheta$  und  $(1 - \cos 2\vartheta)$  an.

Tab. 2. Zur Korrektur der  $y(\xi)$ -Skala.

$\xi$	$2\vartheta$	$\sin 2\vartheta$	$(1 - \cos 2\vartheta)$	$\xi$	$2\vartheta$	$\sin 2\vartheta$	$(1 - \cos 2\vartheta)$
0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	60,00	0,87	0,50
0,05	2,87	0,05	0,00	1,05	63,34	0,89	0,55
0,10	5,73	0,10	0,01	1,10	66,73	0,92	0,60
0,15	8,60	0,15	0,01	1,15	70,20	0,94	0,66
0,20	11,48	0,20	0,02	1,20	73,74	0,96	0,72
0,25	14,36	0,25	0,03	1,25	77,36	0,98	0,78
0,30	17,25	0,30	0,05	1,30	81,08	0,99	0,84
0,35	20,16	0,35	0,06	1,35	84,91	1,00	0,91
0,40	23,07	0,39	0,08	1,40	88,85	1,00	1,00
0,45	26,01	0,44	0,10	1,45	92,94	1,00	1,05
0,50	28,96	0,49	0,13	1,50	97,18	0,99	1,13
0,55	31,92	0,53	0,15	1,55	101,61	0,98	1,20
0,60	34,92	0,57	0,18	1,60	106,26	0,96	1,28
0,65	37,93	0,62	0,21	1,65	111,18	0,93	1,34
0,70	40,95	0,66	0,25	1,70	116,42	0,89	1,44
0,75	44,04	0,69	0,28	1,75	122,09	0,85	1,53
0,80	47,16	0,73	0,32	1,80	128,32	0,78	1,62
0,85	50,30	0,77	0,36	1,85	135,34	0,70	1,71
0,90	53,49	0,81	0,39	1,90	143,61	0,59	1,81
0,95	56,72	0,83	0,45	1,95	154,32	0,43	1,89
1,00	60,00	0,87	0,50	2,00	180,00	0,00	2,00

### Zusammenfassung.

Die üblichen Kalibrierungsverfahren lassen sich auf Weißenbergkameras nicht anwenden, weil diese nicht zur Registrierung von Reflexen mit Glanzwinkeln nahe an  $90^\circ$  gebaut sind. Es wird deswegen ein besonders für Weißenbergkameras geeignetes Kalibrierungsverfahren beschrieben und gezeigt, wie die Berücksichtigung der ermittelten Korrekturen bei der Auswertung von Äquatoraufnahmen ohne Mehrarbeit geschehen kann.



# Über die Geiger-Nuttall-Relation.

Von

Theodor Sexl.

Institut für Theoretische Physik der Universität Wien.

Mit 1 Abbildung.

(Eingelangt am 28. Mai 1951.)

Der *Geiger-Nuttall-Relation* kommt nur noch historische Bedeutung zu; die wellenmechanische Theorie ersetzt sie durch einen linearen Zusammenhang zwischen  $\ln \lambda$  und  $Z - 2/v$ .

Bekanntlich hat *E. Rutherford*<sup>1)</sup> im Jahre 1907 als erster auf die Möglichkeit einer Beziehung zwischen der Zerfallskonstante  $\lambda$  eines natürlichen  $\alpha$ -Strahlers und der Reichweite  $R$  der von ihm emittierten  $\alpha$ -Teilchen hingewiesen. Als vier Jahre später genügend viele Versuchsdaten vorlagen, konnten *H. Geiger* und *J. M. Nuttall*<sup>2)</sup> diese vermutete Beziehung in der später so genannten *Geiger-Nuttall-Relation* in der Weise formulieren, daß die Logarithmen der Zerfallskonstanten nahezu lineare Funktionen der Logarithmen der Reichweiten des  $\alpha$ -Teilchens in Luft für jede radioaktive Familie wären:  $^{10} \log \lambda = A + B^{10} \log R$ .  $B$  war dabei eine universelle Konstante, während  $A$  für jede der drei damals bekannten radioaktiven Familien (U-Ra-, Th- und Ac-Familie) einen besonderen Wert annahm. Die Neigungen dieser näherungsweise Geraden waren also die gleichen. Nach der üblichsten Formulierung der *Geiger-Formel*, welche eine Beziehung zwischen der Reichweite  $R$  und der Anfangsgeschwindigkeit  $v$  (Anfangsenergie) eines  $\alpha$ -Teilchens darstellt, erhält man die fragliche Relation auch in der Form:  $^{10} \log \lambda = A' + \frac{3}{2} B^{10} \log E$ . Da  $E$  nur in dem engen Intervall zwischen 7 und  $13 \cdot 10^{-6}$  erg variiert, während  $\lambda$  sich um mehr als 20 Zehnerpotenzen ändert, kann man nach *R. Swinne*<sup>3)</sup> auch schreiben:  $^{10} \log \lambda = a + b E$ , bzw.  $^{10} \log \lambda = a' + b' E^{1/2}$ .

<sup>1)</sup> *E. Rutherford*, Phil. Mag. (6) **13**, 110 (1907).

<sup>2)</sup> *H. Geiger* u. *J. M. Nuttall*, Phil. Mag. (6) **22**, 613 (1911); **23**, 439 (1912); **24**, 647 (1912).

<sup>3)</sup> *R. Swinne*, Ch. Ztg. **35**, 1376 (1911); Physikal. Z. **13**, 14 (1912); **14**, 142 (1913).

Vom heutigen Standpunkt aus kommt allen diesen Formulierungen der *Geiger-Nuttall*-Relation nur noch historische Bedeutung zu. Die wellenmechanische Theorie des radioaktiven  $\alpha$ -Zerfalls hat nämlich ergeben, daß eine solche einparametrische Beziehung zwischen  $\lambda$  und  $E$  (bzw.  $v$ ), wie sie die obigen Formulierungen der *Geiger-Nuttall*-Relation postulieren, gar nicht existiert.

Die Ausarbeitung einer exakten quantitativen Theorie des radioaktiven  $\alpha$ -Zerfalls auf Grund der Idee von *Gurney* und *Condon*<sup>4)</sup>, bzw. *Gamow*<sup>5)</sup> gelang bekanntlich dem gegenwärtigen Verfasser<sup>6)</sup> und führte durch Auflösung der Eigenwertgleichung für die freien gedämpften Schwingungen des Problems zu den beiden folgenden Gleichungen<sup>6)</sup>:

$$n + \operatorname{tg} \alpha_0 \operatorname{tg} n k r_0 = 0,$$

$$\lambda = \frac{v}{2 r_0} \frac{4 n^2 \operatorname{tg} \alpha_0}{n^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0} e^{-\kappa (2 \alpha_0 - \sin 2 \alpha_0)}.$$

Dabei ist  $n = (1 - U/E)^{1/2} =$  Brechungsindex;  $U =$  Potential im Kerninnern für  $r < r_0 =$  Kernradius;  $\alpha_0 = \arccos \sqrt{\frac{r_0}{r^*}}$ ;  $r^* = \frac{2(Z-2)e^2}{\mu v^2/2} =$  klassischer Umkehrradius bei zentralem Stoß;  $\mu =$  reduzierte Masse  $= 4(A-4)/A$ ;  $\kappa = k r^*$ ;  $k =$  Wellenzahl  $= 2\pi\mu v/h$ .

Die erste dieser beiden Gleichungen liefert die Energieeigenwerte der instabilen Kernniveaus, in denen sich das  $\alpha$ -Teilchen vor seiner Emission im Kerninnern bewegt hat, die zweite stellt die Zerfallskonstante  $\lambda$  als eine Funktion von Kernradius  $r_0$ , Kernladung  $Z$  und Geschwindigkeit  $v$  des  $\alpha$ -Teilchens dar:

$$\lambda = C(r_0, Z, v) e^{-f(r_0, Z, v)}.$$

Die wellenmechanische Theorie führt also zu keiner einparametrischen Formel für  $\lambda$ , sondern stellt  $\lambda$  als Funktion dreier Parameter dar. Die graphische Darstellung einer Abhängigkeit der Zerfallskonstante  $\lambda$  von der Energie  $E$  allein muß also als überholt aufgegeben werden und sollte endlich aus den Lehrbüchern verschwinden.

Nichtsdestoweniger führt folgende Überlegung zu einer sogar einfacheren und eleganteren Darstellung des Zusammenhanges von Zerfallskonstante und Zerfallsgeschwindigkeit. Da der Kernradius  $r_0$  als klein gegenüber dem klassischen Umkehr-

<sup>4)</sup> R. W. Gurney u. E. U. Condon, *Nature* **122**, 439 (1928); *Physic. Rev.* (2) **33**, 127 (1929).

<sup>5)</sup> G. Gamow, *Z. Physik* **51**, 204 (1928).

<sup>6)</sup> Th. Sexl, *Z. Physik* **81**, 163 (1933).

radius  $r^*$  betrachtet werden darf, ergibt sich zunächst in erster Näherung  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \left| \frac{r_0}{r^*} \right|$  und die obige Formel für die Zerfallskonstante nimmt die Form an

$$\lambda = \frac{v}{2r_0} 4n^2 \left| \frac{r_0}{r^*} e^{-\kappa(\pi - 4)} \right| \frac{r_0}{r^*}$$

oder

$$\ln \lambda = \ln \frac{n^2/e \cdot \mu v^2}{\sqrt{\mu(Z-2)} r_0} - \frac{8\pi^2 e^2}{h} \frac{Z-2}{v} + \frac{16\pi e}{h} \sqrt{\mu(Z-2)} r_0.$$

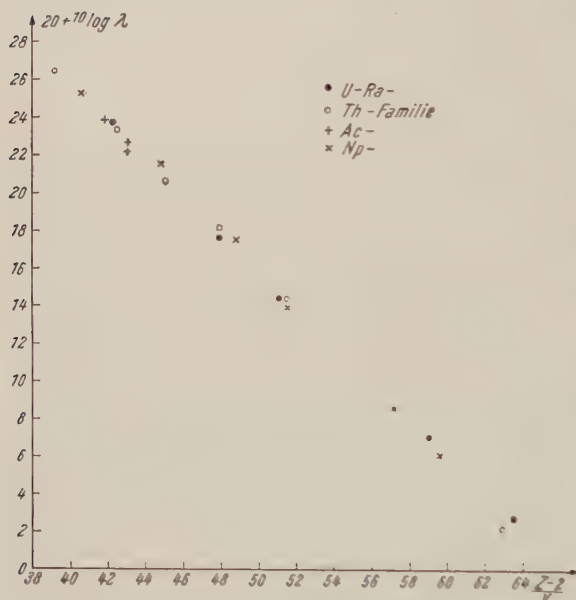


Abb. 1.

Da nun die Wurzel  $\sqrt{\mu(Z-2)} r_0$  nur verhältnismäßig wenig für die radioaktiven Kerne variiert, sollte also  $\ln \lambda$  dieselbe lineare Funktion der Größe  $\frac{Z-2}{v}$  für alle vier radioaktiven Familien sein.

Um diese von der wellenmechanischen Theorie geforderte Beziehung zu überprüfen, wurden in den Tabellen 1—4 die Versuchsdaten über die  $\alpha$ -Strahler der vier radioaktiven Familien

(U-Ra-, Th-, Ac- und Np-Familie) zusammengestellt und die erforderlichen Größen zur graphischen Darstellung der theoretischen Beziehung berechnet. Die Versuchsdaten über die vier radioaktiven Familien wurden dabei dem Werke „Sourcebook on atomic energy“ von S. Glasstone, New York, van Nostrand Comp., 1950, S. 125—128, entnommen und bezüglich der  $\alpha$ -Energien aus der „Table of Isotopes“ von G. T. Seaborg und I. Perlman, Rev. Mod. Phys. 20, 585—667 (1948), bzw. dem „Isotopenbericht“ von J. Mattauich und A. Flammersfeld, Verlag der Z. f. Naturforschung, Tübingen 1949, ergänzt. Da nur Kerne verwendet werden sollen, die auch tatsächlich die theoretischen Voraussetzungen der wellenmechanischen Rechnung (insbeson-

dere  $l=0!$ ) erfüllen, mußten alle  $\alpha$ -Strahler, die gleichzeitig  $\gamma$ -Strahlen emittieren, von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Es sind dies für die U-Ra-Familie die vier Kerne:  $^{230}_{90}\text{Th}$  (Io);  $^{226}_{88}\text{Ra}$ ;  $^{214}_{83}\text{Bi}$  (RaC);  $^{210}_{84}\text{Po}$ ; für die Th-Familie die drei Kerne:  $^{228}_{90}\text{Th}$  (RdTh);  $^{212}_{82}\text{Pb}$  (ThB);  $^{212}_{83}\text{Bi}$  (ThC); für die Ac-Familie die sieben Kerne:  $^{235}_{92}\text{U}$  (AcU);  $^{231}_{91}\text{Pa}$ ;  $^{227}_{89}\text{Ac}$ ;  $^{227}_{90}\text{Th}$  (RdAc);  $^{223}_{88}\text{Ra}$  (AcX);  $^{219}_{86}\text{Rn}$  (An);  $^{211}_{83}\text{Bi}$  (AcC); und für die Np-Familie die zwei Kerne:  $^{241}_{95}\text{Am}$ ;  $^{233}_{92}\text{U}$ . So verblieben insgesamt noch 20 ( $= 5 + 6 + 3 + 6$ ) Kerne. Inwieweit der von der Theorie geforderte näherungsweise lineare Zusammenhang zwischen  $^{10}\log \lambda$  und  $\frac{Z-2}{v}$  tatsächlich vorhanden ist, zeigt die Abbildung.

Tabelle 1.

Kern	rad. Terminologie	$\alpha$ - Energie in MeV	$\alpha$ - Energie in erg. $10^6$	$v \cdot 10^9$ cm je sec $^{-1}$	$\frac{Z-2}{v}$	Halb- werts- zeit $T$ in sec	$\lambda = \frac{0,693}{T}$ in sec $^{-1}$	$20 + ^{10}\log \lambda$
$^{238}_{92}\text{U}$	U I	4,18	6,65	1,42	63,5	$14,2 \cdot 10^{16}$	$4,88 \cdot 10^{-18}$	2,69
$^{234}_{92}\text{U}$	U II	4,78	7,59	1,53	59,0	$7,4 \cdot 10^{12}$	$9,38 \cdot 10^{-14}$	6,97
$^{222}_{86}\text{Rn}$	RaEm	5,49	8,74	1,64	51,1	$3,3 \cdot 10^5$	$2,10 \cdot 10^{-6}$	14,32
$^{218}_{84}\text{Po}$	RaA	6,00	9,54	1,71	47,9	$1,83 \cdot 10^2$	$3,79 \cdot 10^{-3}$	17,58
$^{214}_{84}\text{Po}$	RaC'	7,68	12,21	1,94	42,3	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$4,62 \cdot 10^3$	23,66

Tabelle 2.

Kern	rad. Terminologie	$\alpha$ - Energie in MeV	$\alpha$ - Energie in erg. $10^6$	$v \cdot 10^9$ cm je sec $^{-1}$	$\frac{Z-2}{v}$	Halb- werts- zeit $T$ in sec	$\lambda = \frac{0,693}{T}$ in sec $^{-1}$	$20 + ^{10}\log \lambda$
$^{232}_{90}\text{Th}$	Th	3,98	6,33	1,40	62,7	$4,39 \cdot 10^{17}$	$1,58 \cdot 10^{-18}$	2,20
$^{224}_{88}\text{Ra}$	ThX	5,68	9,05	1,67	51,5	$3,14 \cdot 10^5$	$2,21 \cdot 10^{-6}$	14,34
$^{220}_{86}\text{Rn}$	ThEm	6,28	9,99	1,76	47,9	54,5	$1,27 \cdot 10^{-2}$	18,10
$^{216}_{84}\text{Po}$	ThA	6,77	10,77	1,82	45,1	0,158	4,38	20,64
$^{216}_{85}\text{At}$	At	7,79	12,39	1,95	42,5	$3 \cdot 10^{-4}$	$2,31 \cdot 10^3$	23,36
$^{212}_{84}\text{Po}$	ThC'	8,98	14,28	2,09	39,2	$3 \cdot 10^{-7}$	$2,31 \cdot 10^6$	26,36



Tabelle 3.

Kern	rad. Terminologie	$\alpha$ - Ener- gie in MeV	$\alpha$ - Ener- gie in erg. $10^6$	$v \cdot 10^9$ cm je sec $^{-1}$	$\frac{Z-2}{v}$	Halb- werts- zeit $T$ in sec	$\lambda = \frac{0,693}{T}$ in sec $^{-1}$	$20 +$ $+^{10} \log$ $\lambda$
$^{215}_{85}\text{At}$	At	8,0	12,71	1,98	41,9	$1 \cdot 10^{-4}$	$6,93 \cdot 10^3$	23,84
$^{215}_{84}\text{Po}$	AcA	7,365	11,71	1,90	43,1	$1,83 \cdot 10^{-3}$	$3,79 \cdot 10^2$	22,58
$^{211}_{84}\text{Po}$	AcC'	7,434	11,81	1,91	43,05	$5 \cdot 10^{-3}$	$1,39 \cdot 10^2$	22,14

Tabelle 4.

Kern	$\alpha$ - Ener- gie in MeV	$\alpha$ - Ener- gie in erg. $10^6$	$v \cdot 10^9$ cm je sec $^{-1}$	$\frac{Z-2}{v}$	Halb- werts- zeit $T$ in sec	$\lambda = \frac{0,693}{T}$ in sec $^{-1}$	$20 +$ $+^{10} \log$ $\lambda$
$^{237}_{93}\text{Np}$	4,75	7,59	1,53	59,6	$6,93 \cdot 10^{13}$	$1 \cdot 10^{-14}$	6,00
$^{229}_{90}\text{Th}$	4,85	7,71	1,54	57,2	$2,21 \cdot 10^{11}$	$3,15 \cdot 10^{-12}$	8,50
$^{225}_{89}\text{Ac}$	5,80	9,22	1,68	51,6	$8,64 \cdot 10^5$	$8,03 \cdot 10^{-7}$	13,90
$^{221}_{87}\text{Fr}$	6,30	10,01	1,74	48,75	$2,88 \cdot 10^2$	$2,41 \cdot 10^{-3}$	17,38
$^{217}_{85}\text{At}$	7,02	11,17	1,85	44,8	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$3,30 \cdot 10$	21,52
$^{213}_{84}\text{Po}$	8,336	13,26	2,02	40,6	$4,2 \cdot 10^{-6}$	$1,65 \cdot 10^5$	25,52

## Buchbesprechungen.

**Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers.** Von *K. Federhofer*. In drei Teilen. II. Teil: Kinematik und Kinetik des Punktes. 113 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 105 Textabb., IV, 103 S. S 42.—, sfr. 10.—, \$ 2,30, DM 9.60. — III. Teil: Kinematik und Kinetik starrer Systeme. 149 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 191 Textabb., V, 139 S. S 42.—, sfr. 10.—, \$ 2,30, DM 9.60. — Wien: Springer-Verlag. 1951.

Es liegt nunmehr der II. und III. Teil der Aufgabensammlung von Professor *Federhofer* vor, deren I. Teil ich bereits besprochen habe. Es wurde schon damals darauf hingewiesen, daß es wohl keine geeignetere Persönlichkeit gibt, dieses Aufgabenwerk herauszubringen, welches gleich wichtig für Lehrer und Studierende anzusehen ist. Dadurch, daß das Aufgabenwerk von *Ferdinand Wittenbauer* seit einer Reihe von Jahren vergriffen ist, haben die Studierenden einen empfindlichen Mangel an Übungsbehelfen erleiden müssen, welcher zu einer großen Erschwerung des Studiums geführt hat, so daß durch den nunmehrigen Abschluß dieses Werkes eine große Lücke in der Lehrbuchliteratur ausgefüllt erscheint. Herr Professor *Federhofer* hat sich einer außerordentlich mühevollen Arbeit unterzogen, welche er als bedeutendster Schüler seines Vorgängers *Wittenbauer* muster-gültig durchgeführt hat. Das Werk wird zu einer Vertiefung der Kenntnisse aus Mechanik beitragen und nicht nur an der Technik, sondern auch an der Universität die Einsicht in das oft abstrakte und schwierige Fach verbessern. Es muß daher allen Studierenden auf das eindringlichste empfohlen werden.

*P. Urban, Graz.*

**The Interpretation of X-Ray Diffraction Photographs.** Von *N. F. M. Henry, H. Lipson* und *W. A. Wooster*. Mit 231 Textabb., IX, 258 S. London: Macmillan and Co., Limited. 1951. Geb. 42s. net.

Durch Herausgabe des vorliegenden Werkes wurde ein führendes Lehrbuch der Kristallographie geschaffen. Es gibt einen Grundriß aller verwendeten Methoden zur Bestimmung der Kristallklasse sowie der Auswertung der Röntgenstrahltaufnahmen verschiedener Stoffe. Zuerst werden die fundamentalen Prinzipien erörtert, später dann ihre Anwendung zur Bestimmung der Orientierung der Kristalle sowie ihrer Symmetrieverhältnisse. Auch die Messung der Intensitäten, sowohl durch Photographie- und Ionisationsmethoden, wird behandelt. Die sehr klare und übersichtliche Schreibart des Buches gibt uns ein wichtiges Hilfsmittel zur Erlernung dieses sehr abstrakten und viel Anschauung erfordernden Gebietes. Es muß daher eigentlich auf dem Tisch jedes Röntgenphysikers und Technikers anzutreffen sein.

*H. Stippel, Graz.*

**Lexikon der Elektrotechnik.** Von *G. Oberdorfer*. Mit 371 Textabb., VII, 488 S. Wien: Springer-Verlag. 1951. Geb. S 96.—, sfr. 20.60, \$ 4.80, DM 20.—.

Das eben erschienene Lexikon der Elektrotechnik erleichtert sehr ein Einarbeiten sowohl in inländische wie ausländische Literatur. Die außerordentlich klaren und übersichtlich gehaltenen Erklärungen zu den einzelnen



behandelten Gegenständen ermöglichen es, in kürzester Zeit einen Überblick über den nachzuschlagenden Ausdruck zu gewinnen. Der Autor hat sich einer mühevollen und dankenswerten Aufgabe unterzogen, welche er infolge seiner eminenten Erfahrung in vorbildlicher Weise gelöst hat. Das Werk ist daher jedem im einschlägigen Arbeitsgebiet tätigen Fachgenossen wärmstens zu empfehlen. Druck und Ausführung sind vorbildlich und stellen dem Verlag das beste Zeugnis aus.

*P. Urban, Graz.*

**Einführung in die theoretische Physik.** In drei Bänden. Von *C. Schaefer*. Dritter Band. Zweiter Teil: Quantentheorie. Zweite, durchgesehene Auflage. Mit 88 Textabb., VII, 510 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1951. Geb. DM 40.—.

Da die erste Auflage dieses berühmten Lehrbuches bereits seit 1943 vergriffen ist, wurde nunmehr eine zweite Auflage durchgeführt. Sie enthält keine wesentlichen Änderungen, sondern ist ein von Druckfehlern und sonstigen kleinen Versehen gereinigter Neudruck. Da das Werk von *Clemens Schaefer* bereits genügend besprochen wurde, erübrigt sich, die ohnehin bekannten Vorteile desselben nochmals zu erwähnen. Es stellt eine der besten Einführungen in die moderne Physik dar und gestattet durch seine besonders hervorragende pädagogische Art auch dem mehr experimentell orientierten Leser das Eindringen in dieses schwierige Gebiet. Es muß daher immer wieder den Studenten wärmstens empfohlen werden.

*P. Urban, Graz.*

**Berechnung mechanischer Schwingungen.** Von *F. Söchting*. Mit 140 Textabb., X, 325 S. Wien: Springer-Verlag. 1951. Geb. S 147.—, sfr. 33.60, \$ 7.80, DM 32.70.

Das eben erschienene Werk über die Berechnung mechanischer Schwingungen ist in erster Linie für den Techniker bestimmt und hat die Aufgabe, den Studierenden, welche sich mit Schwingungsproblemen befassen wollen, einen Überblick zu verschaffen. Aber auch den praktisch tätigen Ingenieuren wird ein Hilfsmittel für die Untersuchungen gegeben. Darüber hinaus kann auch der reine Theoretiker ein Bild gewinnen von den Schwierigkeiten, welche der heutige Ingenieur in theoretischer Hinsicht zu meistern hat. Das Buch gliedert sich in fünf Abschnitte, deren erster den Grundlagen gewidmet ist; das zweite Kapitel befaßt sich mit den Schwingungen des Einmassensystems und behandelt freie, ungedämpfte und gedämpfte erzwungene Schwingungen sowie die anharmonischen Schwingungen. Das dritte Kapitel diskutiert die Schwingungen eines Mehrmassensystems und die Koppelschwingungen. Alle Arten von Kopplung, wie Kraftkopplung, Beschleunigungskopplung, Dämpfungs- und Reibungskopplung, finden hier ihre Behandlung. Das vierte Kapitel ist den Schwingungen elastischer Körper gewidmet. Hier findet man neben den üblichen Schwingungsproblemen der Seite und der geraden Stäbe einen hübschen Abschnitt über Näherungsverfahren, der besonders für Studierende zu empfehlen ist. Dann folgt als letztes das fünfte Kapitel, welches die Schwingungen mechanischer Systeme abhandelt. Hier sind besonders mehr technische Verfahren behandelt, die naturgemäß für die Praktiker einige Bedeutung besitzen. Den Abschluß bildet eine Zusammenstellung von Tabellen und ein ausführliches Namen- und Sachverzeichnis. Druck und Ausführung sind mustergültig, der Aufbau des Werkes ist sehr übersichtlich.

*H. Mitter, Graz.*

**Inhaltsübersicht:** Der Abhandlung vorangestellt wird eine zusammenfassende Inhaltsübersicht in Kleindruck. Sie dient als einführender erster Überblick für den Leser und als Vorlage für die Referenten der Referatenblätter. Die Übersicht soll trotz gedrängter Darstellung alles enthalten, was der Verfasser an seiner Arbeit in bezug auf Problemstellung, Methodik und Ergebnisse für unerlässlich zu ihrer Beurteilung hält. Zu einer Beurteilung auch durch den Nichtfachmann!

**Abbildungen:** Sie müssen, wenn auch nur skizziert, doch so weit ausgeführt sein, daß für den dem Thema fernstehenden Verlagszeichner keine Unklarheiten bestehen. Jede Zeichnung ist zu beschriften; die Beschriftung soll das Lesen der Zeichnung auch ohne langes Suchen im Text ermöglichen. Sie ist, als Beschriftung der Abb. Nr. . . . kenntlich gemacht, an der gewünschten Stelle des Textes einzufügen. Die Zeichenvorlage ist der Abhandlung auf gesondertem Blatt, das zwecks Vermeidung von lästigen Verwechslungen durch Autorennamen und Arbeitstitel gekennzeichnet sein soll, beizulegen. Man vergesse nicht, daß Figurenwiedergabe und Textherstellung zwei gesonderte Arbeitsgänge sind, die erst nach der ersten Korrektur zusammenlaufen.

**Tabellen:** Die Übersichtlichkeit einer Tabelle und damit das Erreichen ihres Zweckes kann sehr gefördert werden durch Sorgfalt in der Wahl der Überschriften sowohl für die Tabelle als Ganzes als für die einzelnen Zeilen und Kolonnen. Die gewählten Einheiten müssen klar ersichtlich, die Abkürzungen verständlich sein.

**Formeln:** Der Setzer versteht im allgemeinen nichts vom Sinn der Formeln und hält sich genau an die Vorlage. Korrekturen an gesetzten Formeln bedingen einen unverhältnismäßig großen Aufwand an Mehrarbeit. Unverhältnismäßig in bezug auf die geringe Mehrarbeit, die der Verfasser hat, wenn er Buchstaben und Formelzeichen deutlich und unmißverständlich schreibt, bzw. malt. — Die Formelzeichen sollen womöglich den AEF-Normen entsprechen oder den in den beiden Handbüchern der Physik verwendeten Zeichen angeglichen sein. — Längere mathematische Ableitungen sollen gegebenenfalls in einem mathematischen Anhang zusammengestellt werden; soweit gekürzt, daß der Fachmann den Rechengang übersehen und eventuell kontrollieren kann. Im Text ist raumsparende Schreibweise anzuwenden, also  $(a + b) / c$

statt  $\frac{a + b}{c}$  oder  $e - E / k T$  statt  $e - \frac{E}{k T}$ .

**Zitate** ebenso wie Anmerkungen werden als Fußnoten mit durch die Arbeit fortlaufender Numerierung (zur Erleichterung der Rückverweisung, bzw. zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen) gebracht. Als Zitatmuster (vergleiche die Handbücher oder die S.-B. der Akademie): A. J. Dempster, Nature 136, 180 (1935). Um Einheitlichkeit in den Abkürzungen der Zeitschriftenzitate zu erreichen, ist die Herausgabe eines Verzeichnisses geplant.

**Korrekturen:** Grundsatz muß angesichts der schwierigen Verhältnisse in der ganzen Drucklegung sein, daß sich der Autor, der seine Abhandlung veröffentlicht sehen will, stillschweigend verpflichtet, ebensoviel Sorgfalt, wie er für Literaturstudium, Rechnungen, Beobachtungen aufwendet, auch für die Niederschrift seiner Ergebnisse und die anschließende Korrekturarbeit aufzubringen; auch dann, wenn er seine Interessen bereits wieder anderen Problemen zugewendet hat.

Herausgeber, Schriftleitung und Verlag



*Soeben erschienen:*

## **Grundlagen der Aeromechanik und Flugmechanik**

Von

**Dr.-Ing. Arthur Pröll**

Professor i. R. an der Technischen Hochschule in Hannover

Mit 278 Textabbildungen. XVI, 612 Seiten. 1951

Geb. S 240.—, DM 48.—, \$ 11.50, sfr. 49.50

Prof. Pröll ist schon vor 30 Jahren durch die Herausgabe seiner „Flugtechnik“ (Verlag Oldenbourg, München 1919) bekannt geworden. Dieses Buch ist seit langem vergriffen und auch längst überholt. Nunmehr erscheint aus der Feder des bewährten Fachmannes eine völlig neu gestaltete, allen modernen Anforderungen entsprechende Einführung in die Aeromechanik und deren wichtigste praktische Anwendung, die Flugmechanik. Ausgehend von der allgemeinen Strömungslehre, deren Kenntnis heute auf sehr vielen Gebieten der Technik vordringlich geworden ist, wird die spezielle Aerodynamik des Fluges ausführlich behandelt. In einem Kapitel über Strömungen in kompressiblen Medien (Gasdynamik) wird auch der Bereich der Überschallgeschwindigkeit (Neue Verkehrsprobleme) in die Darstellung einbezogen. Der zweite Teil bringt Theorie und praktische Anwendung der eigentlichen Flugmechanik, wie sie vor allem der flugtechnische Ingenieur als Grundlage für seine Arbeit braucht.

---

*Soeben erschienen:*

## **Anorganische Chemie auf physikalisch-chemischer Grundlage**

Von

**Dr. phil. Alfons Klemenc**

o. Professor an der Technischen Hochschule und Privatdozent an der Universität in Wien

Mit 117 Textabbildungen. XIX, 430 Seiten. 1951

Geb. S 120.—, DM 24.—, \$ 5.70.—, sfr. 24.50

Ein modernes Lehrbuch der anorganischen Chemie muß vor allem berücksichtigen, daß die Chemie heute auf der breiten Basis physikalisch-chemischer Forschung beruht und daß zwischen Chemie und Physik nur ein gradueller Unterschied besteht. Von diesem Gesichtspunkt aus hat der Verfasser das vorliegende Buch aufgebaut, das sich in gleicher Weise an Chemiker und Physiker wendet.

---

*Soeben erschienen:*

## **Ausgewählte Kapitel aus der Physik**

Nach Vorlesungen an der Technischen Hochschule in Graz. In fünf Teilen

Von Prof. Dr. K. W. F. Kohlrausch, Graz

**I. Teil: Mechanik**

Mit 35 Textabb. V, 105 Seiten. 1951

Zweite, verbesserte Auflage

S 27.—, DM 5.40, \$ 1.40, sfr. 5.60

---

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria